المملكة العربية السعودية
وزارة الـــتعـــلــيــم الــعــالـــي
جـامعـة أم الـقــرى
عـمـادة الـدراســات العـلـيا
كلية العلوم التطبيقية فرع الطالبات
قسم الرياضيات

طي التراكيب المبسطة
Folding of Simplicial Complexes

رسالة مقدمة إلى قسم الرياضيات
ضمن متطلبات الحصول على درجة الماجستير في الرياضيات البحتة
(هندسة تفاضلية)

إعداد الباحثة
أشواق بنت سعيد علي لبان

إشراف
أ.د. إنتصار محمد عبد العال الخولي
أستاذ الرياضيات البحتة بكلية العلوم التطبيقية
قسم الرياضيات
جامعة طيبة — المدينة المنورة
سابقاً

1430هـ – 2009م

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللَّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ ﴾

صدق الله العظيم

إهداء إلى

والدتي الغالية

زوجي و ولديي

و إلى جميع إخوتي و أخواتي

شـــكـــر و تـــقـــديـــر

Acknowledgement and appreciation

شكر وتقدير

إن الحمد لله نحمده و نستعينه و نستهديه و نعوذ بالله من شرور أنفسنا و سيئات أعمالنا من يهده الله فلا مضل له ومن يضلل فلا هادي له و أشهد أن لا إله إلا الله و أشهد أن محمدًا عبده و رسوله ، علمه ربه فكان خير من أرسله للناس كافة معلمًا و مبشرًا و نذيرًا فصلاة الله و سلامه عليه أفضل الصلاة و أتم التسليم .

أما بعد

الحمد لله الذي جعل العلم نورًا يضيء للعلماء طريقهم ، و الشكر للواحد الذي يسر لي أن أسلك دروبهم ومنَّ علي بهذا العمل و يسر لي ظهوره على هذا النحو فأتوجه إليه تعالى بجزيل الحمد و الشكر فهو أهله . و امتثالا لقوله صلى الله عليه و سلم (لا يشكر الله من لا يشكر الناس) .

يسرني أن أتقدم بجزيل الشكر و خالص الإمتنان لكل من كان له الفضل بعد الله تعالى في إخراج هذه الرسالة من منسوبي كلية العلوم التطبيقية فرع الطالبات جامعة أم القرى .

وأخص بالشكر سعادة عميدة الكلية الدكتورة / سميحة عبد الله القاري ، ووكيلة الدراسات العليا السابقة الدكتورة / أحلام حسن قملو ، ووكيلة الدراسات العليا الحالية الدكتورة / بسمة حمزة شافعي ، ورئيسة قسم الرياضيات السابقة الدكتورة / مكية سليمان مكي ، و رئيسة قسم الرياضيات الحالية الدكتورة / نهى محمد سيام .

كما أتقدم بجزيل الشكرو التقدير إلى أستاذتي الفاضلة الدكتورة / إنتصار محمد عبد العال الخولي أستاذ الرياضيات البحتة بكلية العلوم التطبيقية قسم الرياضيات جامعة طيبة المدينة المنورة سابقاً التي أعطت الكثير من وقتها و جهدها و علمها في سبيل إنجاز هذه الرسالة و كانت خير المعين لي بعد الله تعالى في إنجاز هذه الرسالة و التي مهما قلت فيها من كلمات لن أوفيها حقها فجزاها الله عني خير الجزاء و جعل ذلك في ميزان حسناتها يوم القيامة .

كما لا يـــفوتـنـي أن أتقـــدم بخـــالص شــــكري و امـتناني إلى أستاذي الفاضل الـــدكتور/ رشاد عبد الستارعبد الباقي أستاذ الرياضيات البحتة المشارك بكلية العلوم التطبيقية فرع الطالـبات جـــامعة أم القرى المـشرف البديل على الرسالة الذي لم يألو جهدًا في تقديم كل عون و مســـاعدة في سبيل إنجاز هذه الرسالة فجزاه الله عني خير الجزاء .

كـمـا أقدم أروع بطاقات شكري و تقديري إلى والدتي الغالية التي كان لتشجيعها و نصـحها و دعائـها أكبر الأثـر في نـفسـي فجـزاها الله عني خير الجزاء . و لرفيق دربي الذي بذل الكثير من وقته و جهده و ساهم في توفير كـل الـظروف المناسبة لي لإنجاز هذه الرسالة فجزاه الله خير الجزاء . و لـجميع إخوتـي و أخـواتي عـلى مـــا لقيته منهم من دعم و تـشجيع . أمـا ولـديــي حسين و حسام فأدعو الله لهما بالصلاح و التوفيق .

ولا يـفوتـنـي في هذا المـقام أن أوجه شكـري و أمتناني لكل من لم يرد أسمه ولم يتسـع المقام لـشكـره . وكلـنـا ينشد الكمال إلا أن الكـمال لله وحـده فـمـا كـان فـــي هـذه الرســــالة من خـير فمن الله و ما كـان فـيها من تقصير فمن نفسي . و آخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين وعلى سيـــدنا محمد صلى الله عليه و سلم أفـضـل الصلاة و أتم التسليم .

المحتويات
Contents

المحتويات

المقدمة

Introduction

المقدمة

يعتـــــبر مـــفهوم الطي من المواضيـــع الحديثة في عـــلم الهـــندسة ولـــه العديد من التطبيقات في العديد من العلوم . وهو ينشأ من فكرة بسيطة وهي أننا إذا قمنا بتجـــعيد صفـــحة من الورق ثم أعدنا فردها مرةً أخرى على سطح طاولة فنجد أن الورقة أصبحت مسطرة بثنيات متقاطعة لا تختفي حتى إذا قمنا بـــتمليس الورقة بواسطة اليد . هذه الثنيات التي ظهرت على سطح الورقة قد تبدو عشوائية وغير منتظمة ولكن بعد التدقيق فيها نلاحظ أنها تتكون من قطع مستقيمة ، وأن عدد القطع المستقيمة المتقاطعة عـــند نقطة يكون عدد زوجي (غالبًا ما يكون العدد أكبر من أو يساوي أربعة) .

من هذه الفـــكرة البـــســيطة بـــدأت الـــدراسة الأولى لـــمفهوم الطي على يد Robertson عام 1977 م و كان أول أنـــواع الـــطي هو الطي الـــمتقايس لعديدات الطيات الريمانية ، حيث قام بدراسة النقاط المنفردة و التقسيمات الناتجة عن الطي و علاقة هذه التقسيمات بالمفاهيم الكلاسيكية مثل الحجم ودرجة هوبف .

بعد ذلك تم التـــوســع في دراسة الطي المتقايس بواســـطـــة El-Kholy لتشمل فراغـــات الأغطية و جوانب أخرى ، كما تم تقديـــم أنواع جديدة من الطي مثل الطي التوبولوجي الذي تم تقديـــمة بواســـطة كلاً من El-Kholy & Robertson وذلـــك بتطوير مفهوم الطي المتقايس في غياب البناء المتقايس .

أما مفهوم الطي المبـــسط على الـــتراكيب المـــبسطة فقد تم تقديمه على يد كلاً من El-Kholy & El-Ghoul ، هذا الطي يرسل مبسطات إلى أخرى من نفس البعد .

ولقد تم تعميم الطي المــبسط إلى الطي الخلوي للتراكيب الخلوية على يد كلاً من El-Kholy & Shahin حــيث تــم فــي هــذا الــطــي إرســال خـــلايا إلى أخــرى من نــفــس البــعــد بــحــيث يــتــضمــن مــحــتوى كــل خلــيــة وصــورتــها نــفــس العدد من الخلايا الصفــرية . ولقد تمت دراســة الــعديــد من خــصائــص و اســتخــدامات هذا النوع من الطي بــواسطة El-Kholy وكــلاً من Farran & Zeen El-Deen .

مفهوم الطي الخلوي هذا $f : M \to N$ من سطح متراص و مترابط M إلى آخر N هو أحد أهم الموضوعات التي يمكن دراستها باستفاضة نظرًا لأن مجمــوعة الــنقاط المنفردة للدالة تشكل في هذه الحالة مخطط يكون منغمسًا في السطــح M ، يــقسم هذا المخطط الســطح M إلى خلايا صفــرية و أحادية وثنائية تسمى على الترتيب بالرؤوس والأحرف و الأوجه و تكون الأوجه على شكل مضلــعات منــحنية يحــيط بــها نفس الــعدد من الأحرف بحيــث يكون عدد الأحــرف عند كل رأس و هو ما يسمى برتبة الرأس هو عدد زوجي أكبر من أو يساوي أربعة.

وبـــــعد محاولات عديدة لتعميم مفهوم الطي المتقايس وعلاقته بالهندسة التفاضلية و التوبولوجي الهندسي قُــدم مفــهوم الطي المنتظم بواسطة Shahin & El-Kholy وهو من أثرى أنواع الطي والتي لها جاذبية خاصة حيث يكون مخطط الطي هو مخطط منــتظم ، أي مخطط كل رأس فيه له نفس الرتبة .

فإذا اعتبرنا $f : M \to P_n$ هو طي منتظم لسطح M على مضلع P_n (مضلع له n من الأحرف و n من الرؤوس) فإنه يمكن تمييز خمسة أرقام مرتبطة بهذا النوع من الطي : عدد رؤوس المخطط (الخلايا الصفرية) α ، و عدد أحرف المخطط (الخلايا الأحادية) β ، وعدد الأوجه (الخلايا الثنائية) γ ، و عدد رؤوس المضلع المطوي عليه n ، بالإضافة إلى

رتبة كل رأس k ، وهـــذه الأرقـــام الخمسة يمكن كتابتها في قوس خماسي على الصورة $(k,n,\alpha,\beta,\gamma)$ باستخـــدام هذه الأرقام أمكن معـــرفة بعض السطوح و المضلعات التي لا يمكن أن يكون بينها طي منتظم كما تم تصنيف كل الأقواس في حالة الطي المنتظم للسطح الكعكي المزدوج على مضلعات مختلفة و إنشاء الطي المنتظم المقابل في كل حالة .

أما طي المخططات فقد تم تقديمه بواسطة El-Kholy & El-Esaway و دراسة العلاقة بين طي زوج من المخططات و طي مخططات جديدة منشأة من هذين المخططين عن طريق بعض العمليات المعروفة مثل الاتحاد و التقاطع والضرب الكارتيزي والربط و الضرب العمودي وضرب الممتدات و التـــحصيل . بالإضـــافة لذلك تم تقديم عمليات جديدة على المخططات ، ودراسة تأثير طي المخططات قبل و بعد هذه العمليات .

كما تم تقديـــم مفهوم الطي المتقايس لفـــراغ منكوفسكي و الطي الكامل للمستوى بواسطة كلاً من El-Kholy & El-Basher . و أيضاً تـــم تـــعريف الـــطي التوبولوجي لفراغ باناخ المسطح ، وكيفية تمثيل الطي بمصفوفات السقوط والتي عن طريـــق تقسيم هذه المصفوفات بطريقة معينة يمكن وصف دالة الطي .

المراجع ([5] - [14] ، [23] ، [26]) .

الملخص باللغة العربية

Arabic summary

ملخص الرسالة

تتناول هذه الرســالة موضوع الطي المبسط على التراكيب المبسطة وهو أحــد أنواع الطي . فمن المعلوم أن أي سطح متراص ومترابط يمكن تثليثه وهذا التثليث يحول السطح إلى تركيب مبسط من البعد الثاني مكون من مبســطات صفرية وأحادية و ثنائية . حيث تناولنا طي السطوح المتراصة و المترابطة (التراكيب المبسطة من بعد 2) طيًا مبــسطًا بالإضافة إلى تصنيف التثليثات المختلفة لــلسطوح المتراصة و المترابطة سواءً كانت هذه السطوح موجهه أو غير موجهة والتي تسمح بطيها طيًا مبسطًا .

تنقسم هذه الرسالة إلى أربعة أبواب ، والوصف التفصيلي لهذه الأبواب كما يلي :

الباب الأول : تصنيف عديدات الطيات الملساء و تثليثها

في هذا الباب عرضــنا بعض المــبادئ و المفاهيم الأساسية في علم الهندسة التفاضلية الــتي سنحتاج إليها على امتداد هذه الرسالة ، و أهم هذه المفاهيم هي عديدات الطيات . ثم اســتعرضنا تصنيف عديــدات الطيات الملساء و كذلك تثليث عديدات الطيات الملساء المتراصة من البعد الثاني (السطوح المتراصة) .

الباب الثاني : عديدات الطيات الريمانية و الجيوديسيات و المخططات

تناولنا في هذا الباب مفهوم عديــدات الطيات الر يمانية و بعض المفــاهيم الأساسية الأخرى مثل الارتباط التآلفي و الانتقال المتوازي و الجيوديسيــات ، ثم اســتعرضنا بعض الخصائص و الأنواع الهامة للمخططات .

الباب الثالث : التراكيب و استعراض بعض أنواع الطي

في هذا الباب بإستخدام مفهوم التراكيب المبسطة و التراكـــــيب الخلوية استعرضنا بعض أنواع الطي و هي الطي المتقايس و الطي المبسط و الطي الخلــوي التي تــعرف على عديدات الطــيات الريمانية و التراكيب المبسطة و التراكيب الخلوية على الترتيب .

الباب الرابع : طي التراكيب المبسطة

هذا الباب يمثل الجزء الرئيسي في هذه الرسالة والذي يحتوي على النتائج الجديدة التي توصلنا إليها ، حــيث قدمنا في بداية هذا الباب عرض لبعـــــض الخـــواص العامة للطي المبسط ، ثم قمـــنا بتصنيف التثليثات المختلفة لـــلسطوح المتراصة و المترابطة سواءً كانت موجهة أوغير موجهة التي تسمح بطي السطح طيًا مبسطًا ولقد حصلنا على النتائج التالية :

1- أي طي مبسط منتظم للكرة يكافئ الطي المثمن .

2- يمــكن طي الــكرة طيًا مبسطًا إذا كان عدد رؤوس مخطط الطي α و عدد أحرفه β و عدد أوجهه γ تحقق العلاقات التالية :

$$\alpha = 2i + 4 \quad , \quad \beta = 6i + 6 \quad , \quad \gamma = 4i + 4 \quad , \quad i = 1,2,3,...$$

3- أي طي مــبسط منــتظم لــلسطح الكعكي ستكون رتبة كل رأس من رؤوس مخططه تساوي 6 .

4- يمــكن طي الســطح الكعكي طيًا مبسطًا إذا كان عدد رؤوس مخطط الطي و أحرفه و أوجهه تحقق العلاقات التالية :

$$\alpha = 4i + 4 \quad , \quad \beta = 12i + 12 \quad , \quad \gamma = 8i + 8 \quad , \quad i = 1,2,3,...$$

أو العلا قات التالية :

$$\alpha = 9i \quad , \quad \beta = 27i \quad , \quad \gamma = 18i \quad , \quad i = 1,2,3,...$$

5- لا يمكن طي السطح الكعكي المزدوج طيًا مبسطًا منتظمًا .

6- يمـــكن طي الجمـــع المترابط للسطوح الكعكية طيًا مبسطًا عدد لا نهائي قابل للعد من الطيات .

7- لا يمكن طي مستوى الإسقاط طيًا مبسطًا منتظمًا .

8- يمـــكن طي مستوى الإسقـــاط طيًا مبسطًا إذا كان عدد رؤوس مخطط الطي و أحرفه و أوجهه تحقق العلاقات التالية :

$\alpha = i + 2 \quad , \quad \beta = 3i + 3 \quad , \quad \gamma = 2i + 2 \quad , \quad i = 1,2,3,...$

9- أي طي مبسط منتظم للجمع المترابط لمستويي إسقاط ستكون رتبة كل رأس من رؤوس مخططه تساوي 6 .

10- يمـــكن طي الجمع المترابط لمستويات الإسقاط طيًا مبسطًا عدد لا نهائي قابل للعد من الطيات .

و قد تم تزويد الرســـالة بقائمة للمراجع و قائمة للمصطلحات العلمية باللغة العربية و مقابلها باللغة الإنجليزية .كما يوجد ملخصين للرسالة أحدهما باللغة العربية و الآخر باللغة الإنجليزية . و في الختام نـــأمل أن نكون قد أسهمنا بجهد متواضع في سبيل فهم أشمل و أدق لمفهوم الطي المبسط .

و نسأل الله تبارك و تعالى أن يوفقنا لما يحبه و يرضاه

الباب الأول

تصنيف عديدات الطيات الملساء و تثليثها

Classification of smooth manifolds and its triangulation

الباب الأول

تصنيف عديدات الطيات الملساء و تثليثها

Classification of smooth manifolds and its triangulation

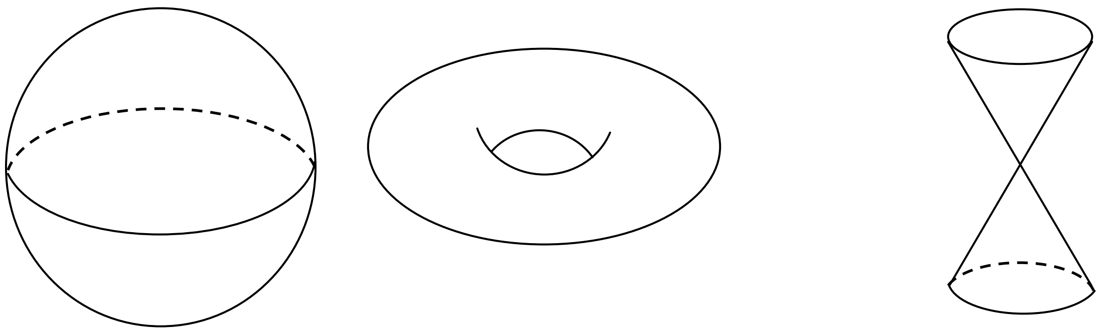
قمنا في هذا الباب بعرض ســـريع لـــبعض المبادئ و المفاهيم الأساسية في علم الهندسة التفاضلية و التي تلزم لإتمام هذه الرسالة . فالهندسة التفاضلية هي علم يهتم بدراسة الخواص الهندسية اللاتغيرية لمجموعة تفاضلية دراسة موســـعة و محلية وهذه المجموعة التي تدور حولها الدراسات هي عديدات الطيات ، و هو مصطلح يطـــلق على بعض الفراغات التوبولوجية التي تتشابه محليًا مع أحد الفراغات الإقليدية .

من المفاهيم التي تناولناها في هذا الباب عديدات الطيات الملساء ، عديدات الطيات الجـــزئية ، عديدات الطيات بـــمحيط ، عديدات الطيات الموجهة و غير الموجهة ، الغـــمر و الغمس ، الجمع المترابط لعديدات الطيات ، تصنيف عديدات الطيات الملساء وفي نـــهاية الباب قدمنا مفهوم تثليث عديدات الطيات الملساء .

(1 – 1) عديدات الطيات الملساء **Smooth manifolds**

عديدات الطيات من المواضيع الهامـــة في الرياضيات والفيزياء والتي تساعدنا على فهم العديد من البنى و التراكيب المعقدة بدلالة خواص مفهومة جيدًا لفراغات أبسط . و توصف عديدات الطيات بأنها فراغات توبولوجية تشبه محليًا (*locally homeomorphic*) فراغات إقليدية. بمعنى أن كل نقطة من عديد الطيات لها جوار يشبه منطقة مفتوحة في فراغ إقليدي. و من أشهر الأمثلة على عديدات الطيات السطوح الملساء مثل الكرة (*sphere*) و السطح الكـــعكي (قارب النجاة) (*tours*) حيـــث أن كـــل نقطة منها تقع في قرص منحني صغير يمكن بسطة على قرص في المستـــوى $\Re^2$ ، انظر شكل (1 – 1) (أ) . بينـــما المخروط

المـــزدوج (*double cone*) لا يمثل عديد طيات حيث أن أي جوار لنقطة الرأس لا يشبه محليًا قطعة من المستوى ، أنظر شكل (1 – 1) (ب) ، [16] .



الكرة السطح الكعكي المخروط المزدوج

(أ) (ب)

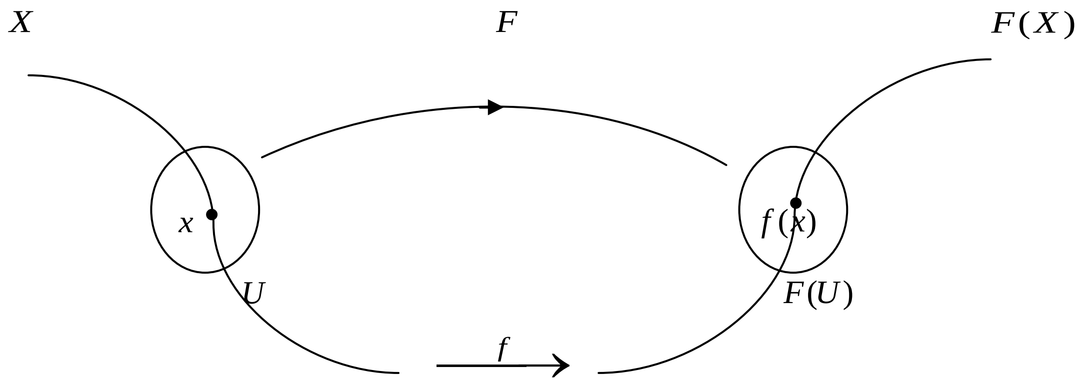
شكل (1 – 1)

وقبل التطرق إلى تعريف عديد الطـيات الأمـلس سنقوم أولاً بتعريف مفاهيم الـرواسم الـمـلـساء (*smooth maps*) و التـشـاكـل الـشكـلي (*homeomorphism*) و الـتمـاثـل التفاضلي (*diffeomorphism*) على الفراغات الإقليدية .

تعاريف (1 – 1) ، [16] ، [20] :

(أ) يقال للراسم $f : U \subset \Re^n \to \Re$ (حيث U مجموعة مفتوحة في $\Re^n$) أنه أملس أي C^∞ (*smooth map*) إذا كانت جميع مشتقاته الجزئية موجودة في جوارات كـل النقط .

(ب) الراسم $f : X \to \Re^m$ المعرف على مجموعة جزئية اختيارية X في $\Re^n$ يسمى راسم أملس إذا كان من الممكن أن يقيد محلياً إلى راسم أملس على مجموعات مفتوحة مع ملاحظة أن المجال يجب أن يكون مجموعة مفتوحة في X حتى يمكن التطرق إلى التفاضل الجزئي ، أي إذا وجد لكل نقطة $x \in X$ مجموعة مفتوحة $U \subset \Re^n$ و راسم أملس $F : U \to \Re^m$ بحيث يتساوى كل من الراسمين F, f على $U \cap X$ ، أنظر شكل (1 - 2) . المصطلح محليًا يشير إلى دراسة السلوك فقط عند جوارت النقاط و علينا أن نتذكر أن المجموعات المفتوحة في X هي المجموعات التي يمكن كتابتها على الصورة $U \cap X$ ، حيث U مجموعة مفتوحة في $\Re^n$ ، و عليه فإن الخاصية الملسائية هي خاصية محلية و الراسم $f : X \to \Re^m$ يكون راسمًا أملسًا إذا كان أملسًا في جوار كل نقطة من نقاط X .



شكل (1 - 2)

(جـ) يقال للراسم f من الفراغ التوبولوجي X إلى الفراغ التوبولوجي Y أنه تشاكل شكلي (*homeomorphism*) إذا و إذا فقط كان راسم متصل و أحادي التناظر وكان معكوسة f^{-1} راسم متصل . كما يقال عن فراغين توبولوجيين X,Y أهما متشاكلان شكلياً (*homeomorphic*) إذا و إذا فقط وجد بينهما دالة تشاكل شكلي ، و يرمز لذلك بالرمز $X \approx Y$.

(د) الراسم الأملـــس $f : X \to Y$ حيـــث X,Y مجموعتين مفتوحتين جزئيتين من فراغيين إقليديين يسمى تماثـــل تفاضلي (*diffeomorphism*) إذا كان راسم أحادي التناظر و كان معكـــوسه f^{-1} راسم أمـــلس ، و في هذه الحالة يقـــال أن X,Y متـــماثلان تـــفاضليًا (*diffeomorphic*) و نكتب $X \cong Y$.

و بالعودة إلى عديدات الطيات الملساء فإننا يمكن أن نعرفها كما يلي :

تعريف (1 – 2) ، [17] :

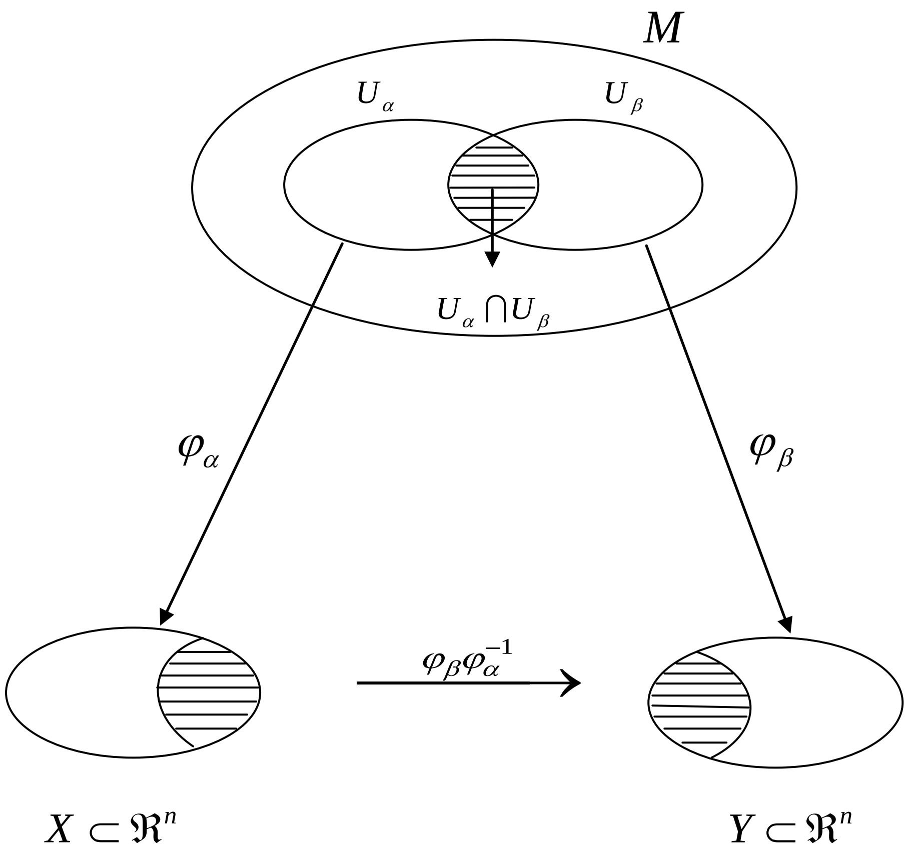
إذا كـــان M فـــراغ توبولوجي غـــير خالي هاوس دورف (*Hausdorff space*) و يحقق مسلمة العد الثانية (*second-countable*) بحيث أن :

1- M هو اتحاد مجموعات جزئية مفتوحة U_α متشـــاكلة شكليًا مع مجموعات مفتوحة من الفراغ الإقليدي $\Re^n$ ، أي أن : $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha U_\alpha \subset \Re^n$ تشاكلات شكلية .

2- إذا كان $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ، فإن راسم التداخل (*overlapping map*) :

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

يـــكـــون أمـــلـــس ، شكل (1 - 3) .



شكل (1 - 3)

كل زوج $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ يسمى خريطة (*chart*) على M ، و مجموعة الخرائط $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ تسمى أطلس (*atlas*) (أملس) على M . الفراغ M مع الأطلس $\mathscr{A}$ يسمى عديد طيات أملس من البعد n أو عديد طيات $-n$ أملس (*smooth n-manifold*).

ملاحظات (1 – 1) ، [3] :

(أ) إذا كان الفراغ M يحقق الشرط الأول من التعريف (1 - 2) فقط فيسمى في هذه الحالة عديد طيات توبولوجي .

(ب) أشترط في الفراغ التوبولوجي M أن يكون فراغ هاوس دورف لتجنب الحصول على فراغات غير مرغـــوبة كعديدات طيات ملساء . مثال لعديد طيات أملس من البعد الأول وليس فراغ هاوس دورف ما يلي :

ليكن $M = C_0 \cup C_1 \cup C_2$ حيث C_0, C_1, C_2 مجموعات جزئية من $\Re^2$ معرفة كالآتي :

$$C_0 = \{(x_1, x_2): x_2 = 0, x_1 < 0\}, C_i = \{(x_1, x_2): x_2 = i, x_1 \geq 0\}, i = 1,2$$

الآن نعرف توبولوجي للفراغ M كما يلي : $U \subset M$ هي مجموعة مفتوحة إذا كانت U مجموعة مفتوحة في التوبولوجي المســـتحث (*induced topology*) على الفراغ M الناتج من $\Re^2$. أمـــا إذا كـــانت $(0,1)$ أو $(0,2)$ تنتـــمي إلى U فإن U ستحتوي على الفـــترة $(-\varepsilon,0)$ في C_0 ، و بالتالي يكون الفراغ M ليس فراغ هاوس دورف و لكنه يمكن أن يعطي أطلس أملس .

(جـ) أيضًا أشـــترط في الفراغ التوبولوجي M أنه يحقق مسلمة العد الثانية لاستبعاد بعض الفراغات غير المرغوبة ، و يمكن الحصول على عديد طيات أملس من البعد الأول لا يحقق مسلمة العد الثانية و ذلـــك بأخذ الاتحاد المنفصل لعدد غير محدود من النسخ لخط الأعداد علمًا بأنه لا يشترط في عديد الطيات أن يكون مترابط .

أمثلة (1 – 1) ، [3] ، [22] :

(أ) الفراغ الإقليدي $\Re^n$ أو أي مجموعة جزئية مفتوحة U منه تمثل عديد طيات أملس من البعـــد n ، و يتـــكون الأطلـــس في هذه الحالـــة من خـــريطة واحدة $(\Re^n, identity)$ أو $(U, identity)$ على الترتيب .

بصورة عامة أي مجموعة جزئية غير خالية و مفـــتوحة V من عديد طيات أملس من البعد n هي نفسها عديد طيات أملس من البعد n ولها أطلس $\{(U_\alpha \cap V), \varphi_\alpha|(U_\alpha \cap V)\}$ نحصل عليه من الأطلس $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ لعديد الطيات الأصلي .

(ب) الاتحاد المنفـــصل لعدد محدود من عديدات الطيات $n-$ الملساء هو عديد طيات $n-$ أملس .

(جـ) دائـــرة الوحدة $S^1=\{(x_1,x_2)\in R^2 : x_1^2+x_2^2=1\}$ هي عديد طيات أملـــس من البعد الأول ، يمكننا أن نغطي الدائرة بأكثر من أطلس أملس .

(د) إذا كـــان M,N عـــديدي طيات أملســـين من بعدي m,n على الترتـــيب فـــإن فـــراغ الـــضـــرب $M\times N$ هو عـــديـــد طيات أمـــلس بعـــده $m+n$. و إذا كـــان $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, $\mathscr{B}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ هما أطـــلســـان أملسان لعديدي الطيات M,N على الترتيب فـــإن $\mathscr{A}\times\mathscr{B}=\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}$ هو أطلس أملس لـــعديد الطيات $M\times N$ حيـــث $(\varphi_\alpha,\psi_\beta)(x,y)=(\varphi_\alpha(x),\psi_\beta(y))\in R^m\times R^n=R^{m+n}$. على ســـبيل المثال السطح الكعكي $S^1\times S^1$ هو عديد طيات أملس من البعد الثاني و $S^1\times S^1\times\ldots\times S^1$ (مضروبة n من المرات) هو عديد طيات أملس من بعد n و أيضًا $S^m\times R^n$ هو عـــديد طـــيات أملس من بـــعد $m+n$.

(هـ) إذا كان X فـــراغ توبولوجي معرف عليه علاقة تكافؤ r ، هذه العلاقة تجزئ الفراغ X إلى فصـــول تكافؤ X/r و التي يمكن جعلها فراغًا توبولوجيًا كـــما يـــلي : إذا كان $\pi : X\to X/r$ هو راسم الإسقاط المعرف كما يلي $x\mapsto[x]$ (حيث $[x]$هو فصل تكافؤ للنقطة x) فإن $U\subset X/r$ تـــكون مجموعة مفتوحة إذا و إذا فقـــط كانـــت $\pi^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في الفراغ X . يسمى X/r بفراغ القسمة للفراغ X بعلاقة التكافؤ r علمًا بأن الراسم π هو راسم متصل .

الآن ســـوف نـــطرح السؤال التالي : إذا كان M عديد طيات أملس فهل M/r هو عديد طيات أملس ؟ بشكل عام الإجابـــة هـــي لا ولكن الأمثلة التالية هي بعض الحالات التي يمكن أن يتحقق فيها ذلك :

1- إذا كان $M=\Re$ وعلاقة التكافؤ r على خط الأعداد معرفة كما يلي :

حيث Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة ، $xry \Leftrightarrow x-y\in Z$

فراغ القسمة $\Re/r$ هنا متشاكل شكليًا مـــع الدائرة S^1 أي أن $\Re/r\approx S^1$.

المجموعات المفتوحة هنا هي فترات مفتوحة ، و إذا كانت $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \Re$ هي رواسم الإحتواء حيث U_α فترات مفتوحة ، و راسم الإسقاط $\pi : \Re \to \Re/r$ معرف كما يلي $\pi(t) = e^{2\pi i t}$ فإن $\mathscr{A} = \{(\pi U_\alpha, \varphi_\alpha(\pi U_\alpha))\}$ هو أطلس أملس لفراغ القسمة $\Re/r$.

2- إذا كان $M = \Re^2$ وعلاقة التكافؤ r معرفة عليه كما يلي :

$$xry \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 \in Z \\ x_2 - y_2 \in Z \end{cases} \qquad , \qquad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

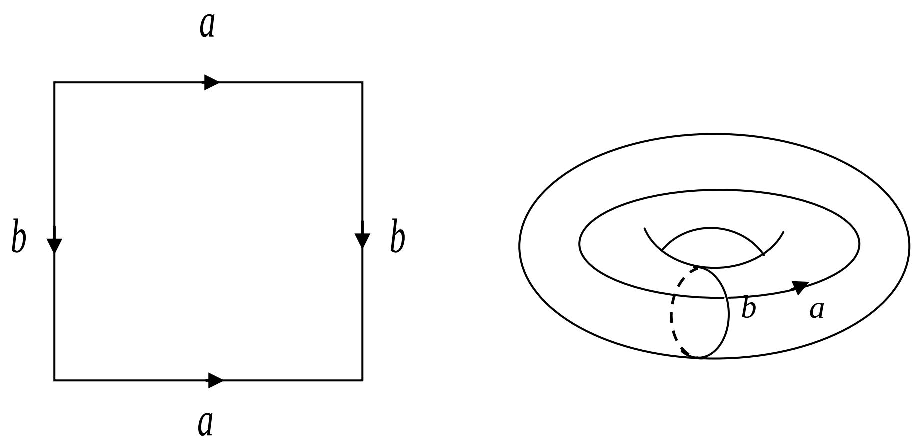
هنا فراغ القسمة $\Re^2/r$ متشاكل شكليًا مع السطح الكعكي $S^1 \times S^1$ أو T^2 .

إذا كان راسم الإسقاط $\pi : \Re^2 \to \Re^2/r$ معرف كما يلي $\pi(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ يمكن الحصول على أطلس للفراغ $\Re^2/r$ باعتبار المجموعات المفتوحة في $\Re^2$ هي مربعات مفتوحة طول كل حرف فيها < 1 .

السطح الكعكي T^2 يمكن أن يعرف أيضًا كفراغ توبولوجي متشاكل شكليًا مع المربع X في $\Re^2$ المعرف كما يلي :

$$X = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1 \quad , \quad 0 \le y \le 1\}$$

ونحصل عليه عن طريق تطابق (*identifying*) الأحرف المتقابلة في المربع حسب الطريقة التالية : الحرف $(0, y)$ يتطابق مع الحرف $(1, y)$ حيث $0 \le y \le 1$ ، و الحرف $(x,0)$ يتطابق مع الحرف $(x,1)$ حيث $0 \le x \le 1$ مع ملاحظة أن الأحرف المتطابقة يرمز لها بنفس الرمز و الأسهم في نفس الاتجاه تعني أن التطابق في نفس الاتجاه و بدون لي ، أنظر شكل $(1-4)$.



السطح الكعكي

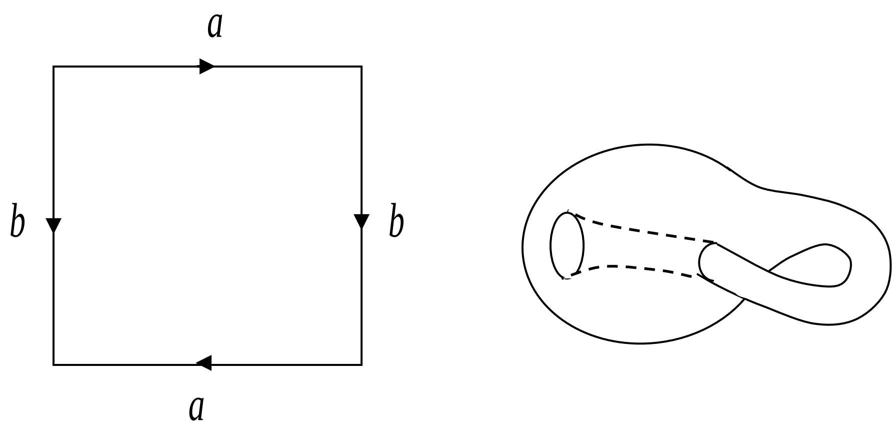
شكل (1 – 4)

3- إذا كان $M = \Re^2$ وعلاقة التكافؤ r معرفة عليه كما يلي :

$$xry \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 = m \\ x_2 = n + (-1)^m y_2 \end{cases} \quad , \quad m, n \in Z$$

فإن فراغ القسمة $\Re^2/r$ يسمى قارورة كلاين (*Klein bottle*) و يرمز له بالرمز K^2 . يمكن إنشاء قارورة كلاين بتطابق أحرف المربع $[0,1]\times[0,1]$ في المستوى كما هو موضح في شكل (1 – 5) (أ) حيث يتطابق الحرفان $0 \le y \le 1$, $(0, y) \sim (1, y)$ والحرفان $0 \le x \le 1$, $(x,0) \sim (1-x,0)$.

لا يمكن إنشاء قارورة كلاين في الفراغ الثلاثي دون أن تقطع نفسها ، و مع هذا نظرياً يمكن إنشائها في الفراغ الرباعي بدون أن تقطع نفسها ، انظر شكل (1 – 5) (ب) .



(أ)　　　　　　(ب)

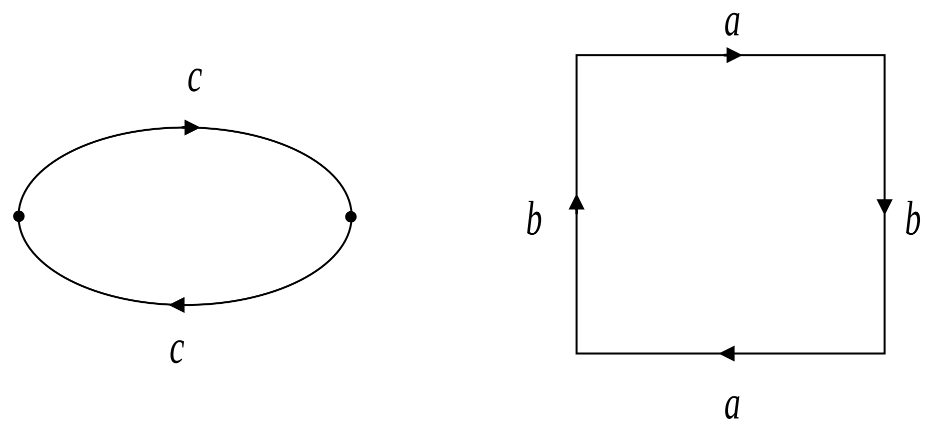
قارورة كلاين

شكل (1 - 5)

4- إذا كـــان $M=S^n$ وعـــلاقة التكافؤ r معرفة عليه كمـــا يلي : $xry \Leftrightarrow x=\pm y$ المجموعات المفتوحة هنا تمثل بأنصاف كور ، وبـــذلك فإن أطلس نصف الكرة الـــعلوي في S^n يعطي أطلس أملس لفراغ القسمة S^n/r ، و يســـمى فراغ القســـمة في هذه الحـــالة بمستوى الإسقاط الحقيقي (*real projective plane*) ، أو يـــسمى بـــاخـــتصار مستوى الإسقاط (*projective plane*) و يرمز له بالرمز P^n ، أو RP^n ، أو $P^n(R)$.

كحالة خاصة إذا كانت علاقة التكافؤ معرفة كما يلي : $xry \Leftrightarrow x=-y$ ، أي أن x,y نقاط متـــقابلة قـــطريًا وفراغ القسمة يسمى مستوى الإسقاط الحقيقي من البعد الثاني P^2 الذي نحصل عليه من الكرة S^2 بتطابق النقاط القـــطرية المتقابلة و عليه تكون أي نقطة في P^2 هي مسقط نقطتين متقابلتـــين في S^2. فإذا اعتبرنا نصف الكرة العلوي H فقط حيث $H=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2 : x_3 \geq 0\}$ فمـــن الواضح أن كل نـــقطة فيه ستقابل نقطة في مستوى الإسقاط ماعدا تلك التي تقع على محيـــط H ، و بناءًا عـــلى ذلـــك يمكن الحصول على مستوى الإسقاط الحقيقي بتطابق محيط القرص كما هو موضح في الشكل $(1-6)$ (أ) .

وحـــيث أن القرص متـــشاكل شكليًا مع المربع فــــيمكن الحصول عـــلى P^2 من تطابق أحـــرف مربع الوحدة $[0,1]\times[0,1]$ حسب القاعدة التالية : $0\le x\le 1$, $(x,0)\sim(1-x,0)$ ، $0\le y\le 1$, $(0,y)\sim(1,1-y)$ ، أنظر شكل (1 – 6) (ب) .



(أ) (ب)

مستوى الإسقاط الحقيقي

شكل (1 - 6)

يتضح من الأمثلة السابقة أن عديد الطيات من بعد n يمـــكن أن يكون مترابط أو غير مترابط ، مـــتراص أو غـــير متراص ، و لكـــن في جميـــع الحالات يـــكون دائمًا متراص محليًا ، [22] .

(1 – 1 – 1) البنية الملساء Smooth structure

إذا كان M عـــديد طيات أملس ، و $\mathscr{A}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$, $\mathscr{B}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ أطلسان أملسان على M . يقال أن الأطلـــسين $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ متكافئان إذا و إذا فقط كان $\mathscr{B}\cup\mathscr{A}$ أطلس أملس لعديد الطيات الأملـــس M ، أي أن كل رواسم التداخل $\psi_\beta\varphi_\alpha^{-1}$ أو $\varphi_\alpha\psi_\beta^{-1}$

تكـــون ملساء . علاقة " أطلسان متكافئان" تـــمثل علاقة تكافؤ وكل فصل تكافؤ يحتوي على أطلس أعـــلى وحـــيد (*maximal atlas*) و ينتج عن اتحاد كـــل الأطالس في فصل التكافؤ ويسمى البنية الملساء لعديد الطيات M . أي أن كـــل أطلس أملس يحـــدد فصـــل تكافؤ وحيد من الأطالس وبناءًا على ذلك يحـــدد بنية ملساء وحيدة . عكسيًا البنية الملساء هي حالة خاصة من الأطلس ألأملس ، [3] .

أي فراغ معطى يمكن أن يحتوي على بنـــيات ملساء مختـــلفة ، فعلى سبيل المثال خط الأعداد $\Re$ لـــه بنيـــة ملساء محـــددة بالأطلس الذي يتـــكون من الخريطة (U,φ) حيث $\varphi = identity$, $U = \Re$ ، أيضًـــا لـــه بـــنية ملساء بالأطلس الذي يتكون من الخريطة (V,ψ) حيث $\psi(x) = x^3$, $V = \Re$.

تعاريف (1 – 3) ، [3] :

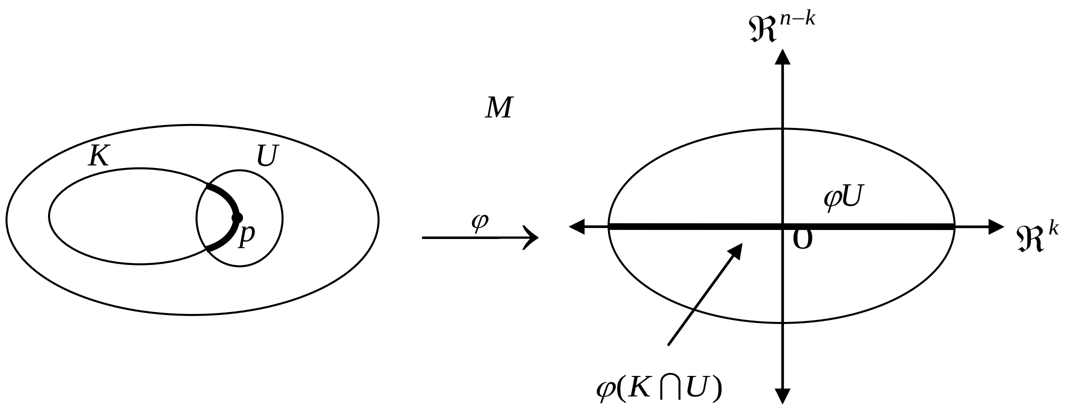
(أ) إذا كان M عديد طيات أملس ذو بنية ملساء $\mathscr{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ ، و X فراغًا توبولوجيًا و الراسم $h: X \to M$ تشاكل شكلي . فـــإن هذا الراسم سيـــســـتـــحث بنية ملساء $\{(h^{-1}U_\alpha, h\varphi_\alpha)\}$ على X و يرمز لها بالرمز $h^*\mathscr{A}$. إذا كان الفراغ X عديد طيات أملس فإن بنيته الملساء قد لا تتفق مع البنية المستحثة $h^*\mathscr{A}$.

(ب) إذا كان M, N عديدي طيات أملسان لهما بنيتين ملسائتين $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ على الترتيب فإن التـــماثـــل التفاضلي من عديد الطيات M إلى عديد الطيات N و الـــذي يرمز له بالرمز $M \cong N$ هو تـــشاكل شـــكلي $h: M \to N$ بحيث أن $h^*\mathscr{A} = h^*\mathscr{B}$. هذا يـــعني أن الرواسم $\psi_\beta h\varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha h^{-1}\psi_\beta^{-1}$ رواسم ملساء لكل $(V_\beta,\psi_\beta) \in \mathscr{B}$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha) \in \mathscr{A}$. لاحظ أنه إذا كان $M_1 \cong M_2, N_1 \cong N_2$ فإن $M_1 \times N_1 \cong M_2 \times N_2$.

(1 – 2) عديد الطيات الجزئي Submanifold

تعريف (1 – 4) ، [3] :

ليكن M عديد طـــيات أملس من بعد n ، و ليكن $K \subset M$. يقـــال أن K عديد طيات جزئي من عديـــد الطيات M بعده k إذا كان لكل $p \in K$ توجد خـــريطة (U,φ) في الـــبنـــيـــة الـــمـــلساء لعديـــد الـــطيـــات M بحيث أن $p \in U, \varphi(p) = 0 \in \Re^n$ ، و $\varphi(K \cap U) = \Re^K \cap \varphi U \in \Re^n$ حيث $\Re^n = \Re^k \times \Re^{n-k}$. أي أن K عديد طيات جزئي من M يشبه محليًا الفراغ $\Re^k$ في $\Re^n$ ، أنظر شكل (1 – 7) .



شكل (1 – 7)

يجب ملاحظة أن أي عديد طيات جزئي من البعد k يكون هو نفسه عديد طيات من بعد k ، ولا يكون بعد عديد الطيات الجزئي أكبر من بعد عديد الطيات الذي يحتويه .

أمثلة (1 − 2) ، [3] :

(أ) أي مجموعة مفتوحة جزئية من الفراغ الإقليدي $\Re^n$ هي عديد طيات جزئي أملس ذو بعد n من $\Re^n$. و أيضًا كل مجموعة مفتوحة من عديد طيات أملس من البعد n هي عديد طيات أملس جزئي بعده n .

(ب) إذا كان M,N عديدا طيات أملسين من بعدي m,n على الترتيب ، فإن $\{x\}\times N$ هو عديد طيات أملس جزئي من $M\times N$ من بعد n لأي $x\in M$.

(ج) الكرة الملساء S^2 هي عديد طيات جزئي من البعد الثاني من الفراغ $\Re^3$ ، و بصورة عامة S^{n-1} هي عديد طيات جزئي أملس من الفراغ $\Re^n$ من البعد $n-1$.

(د) إذا كان K,L عديدي طيات أملسان جزئيان من عديدي الطيات M,N و بعدهما k,l على الترتيب ، فإن $K\times L$ هو عديد طيات أملس جزئي من عديد الطيات $M\times N$. على سبيل المثال $S^1\times S^1$ هو عديد طيات جزئي من عديد الطيات $\Re^2\times\Re^2=\Re^4$. في الواقع كل عديد طيات أملس يكون متماثل تفاضليًا مع عديد طيات أملس جزئي من فراغ إقليدي .

(1 − 3) عديدات الطيات بمحيط Manifolds with boundary

عديد الطيات بمحيط من بعد n هو فراغ هاوس دورف M يتكون من مجموعتين من النقاط : مجموعة النقاط الداخلية و مجموعة النقاط المحيطية بحيث أن النقاط الداخلية هي النقاط التي لها جوارات متشاكلة شكليـًا مع مجموعات مفتوحة في الفراغ $\Re^n$ ، و النقاط المحيطية هي النقاط التي لها جوارات متشاكلة شكليًا مع مجموعات مفتوحة في نصف الفراغ $\Re^n$ ($\frac{1}{2}\Re^n$ أو H^n) حيث :

$\frac{1}{2}\Re^n=H^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\Re^n : x_n\geq 0\}$ ، [31] .

و في هذه الحالة سترسل رواسم التشاكل الشكلي كل نقطة محيطية إلى نقطة لها $x_n=0$.

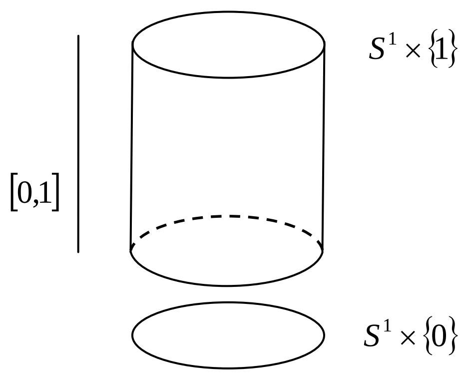
لاحــظ أن مــجموعتي النقاط الداخلية و النقاط المحيطية لعديد طيات M بمحيط هما مجموعتين منفصلتين . حيث أن مجموعة النقاط الداخلية هي مجموعة مفتوحة في حــين أن مجــمــوعة الــنقاط المحيطية مجموعة مغلقة . يرمز لمجموعة النقاط المحيطية بالــرمز ∂M . يمكن اعتبار عديدات الطــيات الملساء بدون محيط هي عديدات طيات ملساء بمحيط حيث $\partial M = \phi$ ، علمــاً بأن محيط عديد طيات من بعد n هو عديد طيات من بعد $(n-1)$ بدون محيط . أيضًا $\partial(\partial M) = \phi$ ، [22] .

أمثلة (1 – 3) :

(أ) القرص المغلق أو الكرة المغلقة $D^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \le 1\}$ هو عديد طيات أملس بمحيط من البعد n ، $\partial D^n = S^{n-1}$.

(ب) يمكن الحصول على عديد طيات بمحيط من البعــد الثاني بــإزالــة عــدد محدود من الأقراص المفتوحة من عيد طيات من البعد الثاني .

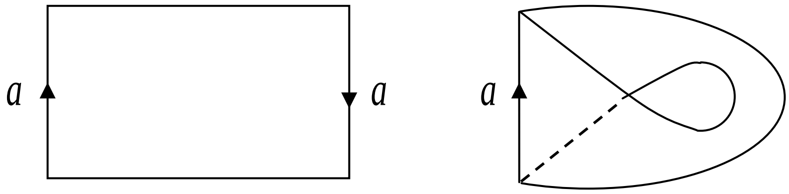
(ج) الأسطــوانة المحــدودة $S^1 \times [0,1]$ هي عديد طيات بمحيط من البعد الثاني و محــيطها يتكون من الدائرتــين $S^1 \times \{1\}$, $S^1 \times \{0\}$ كما هو مبين بالشكل (1 – 8) .



الأسطوانة

شكل (1 – 8)

(د) شـــريحة مـــوبـــاس M (*Mobius band*) و التي يمكن الحصول عليها بتطابق أحرف مستطيل بعد ليه كما في شكل (1 – 9) هي عديد طيات بمحيط و محيـــــطها يتكون من دائرة واحدة .



شريحة موباس

شكل (1 - 9)

يجـــب ملاحظة أن ضرب عديدي طيات بمحيط بصورة عامة لا يمثل عديد طيات بمحيط ، و لكن ضـــرب عديد طيات بـــدون محيط مع آخـــر بمحيط يمثل عديد طيات بمحيـــط.

(1 – 4) عديدات الطيات الموجهة و غير الموجهة
Orientable and nonorientable manifolds

عديدات الطيات المترابطة من بعد n حيث $n>1$ تنـــقسم إلى نوعين : عديدات طيات موجهة ، و عـــديـــدات طيات غير موجهة . من الممكن أن نقول بصورة عامة أن عديد الطيات الموجه هـــو الذي له وجهـــين في حين أن عديد الطيات غير الموجه له وجه واحد فعلى سبيل المثال الكرة S^2 هـــي عـــديـــد طيات موجه من البعد الثاني و ذلك لوجود وجهين ، أمـــا شريحة موباس فهي عديد طيات غير موجه من الـــبعد الثاني و ذلك لوجود وجه واحد له . و حتى نتمكن من تعريف عديدات الطيات الموجهة و غير الموجهة سوف

نقوم بربط مفهوم التوجيـــه في عديدات الطيات بمفهوم التوجيه في الــفراغات المتجهة كما يلي :

أولاً نعـــتبر $V=\Re^2$ ، ونفـــرض أن $A:\Re^2\to\Re^2$ هو تحـــويل خطي ، و أن دائرة الوحدة S^1 ستُـــأخذ لمنحنى بسيط مغلق C يلف مرة واحـــدة حول نقطة الأصل . الاتجاه الموجب للدوران حول S^1 قد يقابل أما الاتجاه الموجب أو الـــسالب لـــلدوران حـــول C (الاتجـــاه الموجب يعني في اتجاه تزايد θ) . وهذا يتحدد عن طريق إشارة محدد A من حيث كونه موجب أو سالب علمًا بأن محـــدد A لا يساوي الصـــفر لأن A تحـــويل خطي . يمكن تعميم ذلك للفراغ الإقليدي $\Re^n$ بـــتعريف تـــحويل خطي $A:\Re^n\to\Re^n$ بحيث يحافظ على التوجيه أو يعكسه وذلك بحسب ما إذا كان محدد A موجب أو سالب.

الآن نفرض أن U مجموعة مفـــتوحة في $\Re^n$ ، ونفرض أن $h:U\to hU\subset\Re^n$ تماثل تفاضلي . لكل $x\in U$ المشتقة $Dh(x):\Re^n\to\Re^n$ هـــي تـــحويل خطي ، و بالتالي إما أن تحافظ على التوجيه أو تعكسه . فإذا كان محدد $Dh(x)$ لـــه نفس الإشارة لـــكل $x\in U$ فيقال أن التحويل الخطي h إما يحافظ على التوجيه أو يعكسه بحسب هذه الإشارة .
و بالعودة إلى عديدات الطيات الملساء نجد أن :

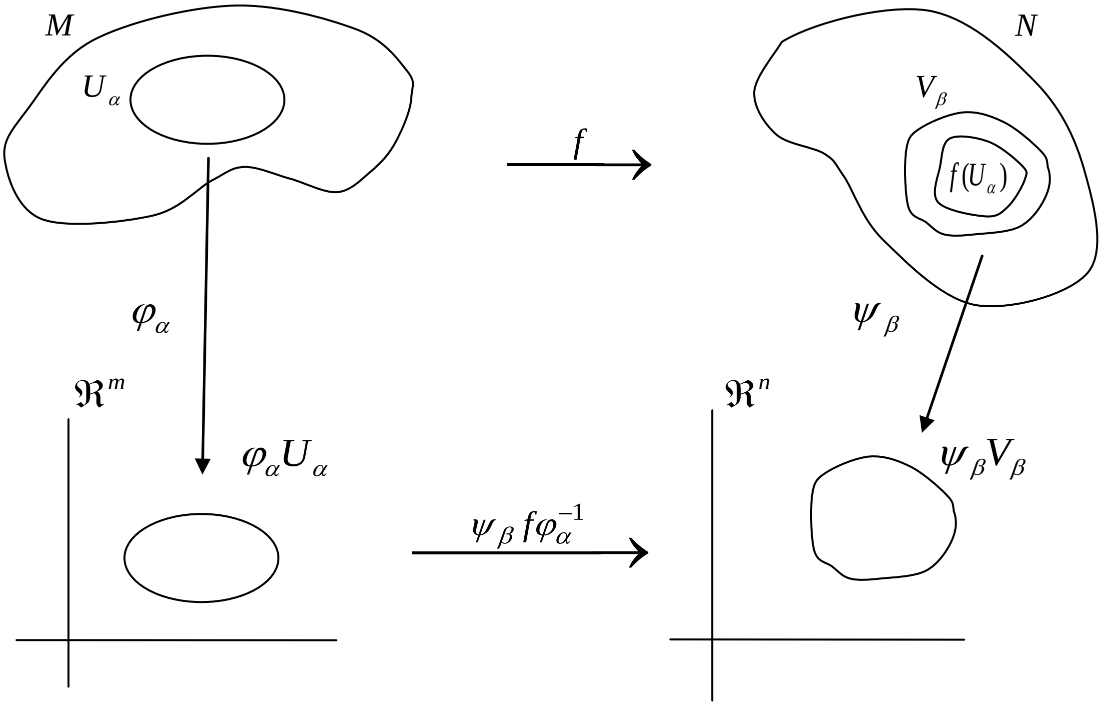
تعريف (1 – 5) ، [3]:

ليكن M عديد طيات أملس له بنية ملســـاء . إذا كان عديد الطيات M يحتوي على أطلس بحيث أن جميع رواسم التداخل $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}$ تحـــافظ على التوجيه يقال أن عديد الطيات M موجه و إذا كانت إحداها تعكس التوجيه يقال أن عديد الطيات M غير موجه . ومن الأمـــثـــلة على عـــديدات الطيـــات الموجهة الفراغ الإقليدي $\Re^n$،و الكرة S^n، والسطح الكعكي T^2 ، ومن الأمثلة على عديدات الطيات غير الموجهة قارورة K^2 كلاين ، ومستوى الإسقاط P^2 ، و شريحة موباس .

(1 – 5) الغمر و الغمس Immersion and embedding

تعاريف (1 – 6) ، [3] :

(أ) الراســم المتصل $f : M \to N$ حيث M, N عديدا طيات أملــسان من بعــدي m,n على الترتيب هو راسم أملس إذا كان لجميع الخرائط $(U_\alpha, \varphi_\alpha),(V_\beta, \psi_\beta)$ من البنية الملساء لعديدي الطيات M, N على الترتيب و المــأخــوذة بحــيث أن $fU_\alpha \subset V_\beta$ يكون فيها التحصيل $\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha U_\alpha \to \Re^n$ هو راسم أملس ، انظر شكل(1 – 10) . أي أن الراسم f يكون راسمًا أملسًا بالنسبة لكل الإحداثيات المحلية .



شكل (1 – 10)

نلاحظ أنه إذا كان $f:K\to M, g:L\to N$ راسمـــان أملـــسين بين عديدات طيات ملساء فإن الراسم $f\times g:K\times L\to M\times N$ المعرف كما يلي : $(f\times g)(x,y)=(f(x),g(y))$ يكون هو أيضًا راسم أملس .

(ب) ليكن M,N عديـــدا طيات أملسين من بعدي m,n على الترتيب . الراسم الأملس $f:M\to N$ يكون غمس (*embedding*) إذا و إذا فقط كان الراسم f متماثل تفاضليًا على الصورة أي أن :

الراسم $f:M\to N$ غمـــس $\Leftrightarrow$ كان $f(M)$ عديد طيات أملس جزئي من N و كان $f:M\to f(M)$ تماثل تفاضلي

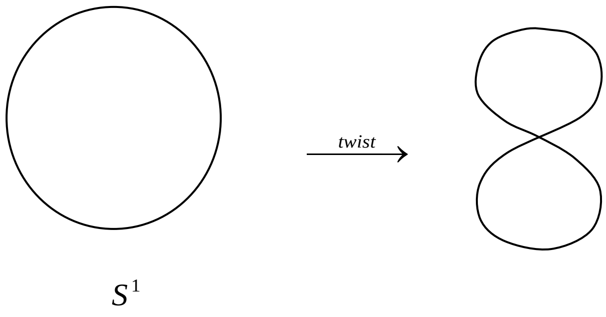
(ج) الراسم الأملس $f:M\to N$ يكون غمر إذا و إذا فـــقط كان الراســـم f غمس محليًا ، أي أن :

الراسم $f:M\to N$ غـــمر $\Leftrightarrow$ كان لأي $x\in M$ يوجد جوار U للنقطة x في M بحيث أن $f|U$ يكون غمس .

من التعريف السابق نجد أن كل غمس هو غمر ولكن العكس غير صحيح ، لأنه من الممكن أن لا يـــكون الغمر تناظر أحادي أو **لا** تكون صورته عديد طيات أملس جزئي من الفراغ المغمور فيه ، [16] .

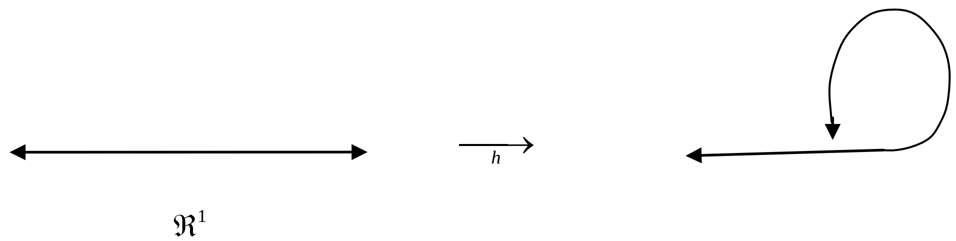
<u>أمثلة (1 – 4) </u>:

(أ) إذا اعتبرنا الراســـم f الذي يلوي الـــدائرة S^1 على شكل 8 ، هذا الراسم هو غمر لـــلـــدائرة S^1 في الفراغ $\Re^2$ و لكنـــه ليس غمس لأن الصورة ليست عديد طيات أملس جزئي من $\Re^2$ ، انظر شكل (1 – 11) . لاحظ أن هذا الراسم ليس تناظر أحادي .



شكل (1 - 11)

(ب) الراسم $h:\Re\to\Re^2$ ، حيث $h(t)\to p$ عندما $t\to\infty$ الموضح بالشكل (1 - 12) هو غمر و لكنه ليس غمس لأن الصورة ليست عديد طيات جزئي من $\Re^2$.



شكل (1 - 12)

ملاحظة (1 – 2) :

كل تماثـــل تـــفاضلي هو غـــمس و إذا كان K عديد طيات أملس جزئي من عديد الطيات M فإن راسم ألاحتواء من K إلى K هو غمس .

من الممكن إثبات أن الغـــمر يكون غـــمس إذا و إذا فقط كان متشاكل شكليًا على صورتـــه ، و إذا كان M عديد طيات متراص فإن الغمر من M إلى N يكون غمس إذا وإذا فقـــط كان فـــوقي . أيضًا أي عديد طيات أملس من البعد n يمكن غمسه في الفراغ $\Re^{2n+1}$ ، [3]. و لقـــد أثبت Whiteny أن عديدات الطيات من الممكن غمرها في $\Re^{2n}$ ، وبعد حوالي عشر سنين تم تعديل النظرية لتصبح إمكانية الغمس في $\Re^{2n}$ و الغمر في $\Re^{2n-1}$ ، [29].

(1 – 6) الجمع المترابط لعديدات الطيات

Connected sum of manifols

من الـــممكن الـــحصول على عديد طيات أمـــلس من بعد n من عديدي طيات أملسين من نفس البعد عن طريق ما يسمى بعملية الجـــمع المترابط (*connected sum*) .

يرمز للجمع المترابط لعـــديدي طيـــات مترابطين M_1, M_2 من بـــعد n بالرمز $M_1 \# M_2$ ويـــكون ذلـــك عن طـــريق إزالـــة داخلـــية كرتـــين من بعد n من كل منـــهما ثـــم نـــطـــابق عـــديـــدي الـــطـــيات الـــناتجين $M_2' = (M_2 - B_2^\circ)$, $M_1' = (M_1 - B_1^\circ)$ (حـــيث B_1°, B_2° هـــما داخـــلـــية الكـــرتين) معـــاً على مـــحـــيطي هاتـــين الكرتين و ذلـــك بـــاســـتخـــدام تـــشـــاكـــل شـــكـــلي $h : \partial B_1 \to \partial B_2$ ، حيـــث $\partial B_1, \partial B_2$ هـــما محـــيط الـــكرتـــين ، أي أن :

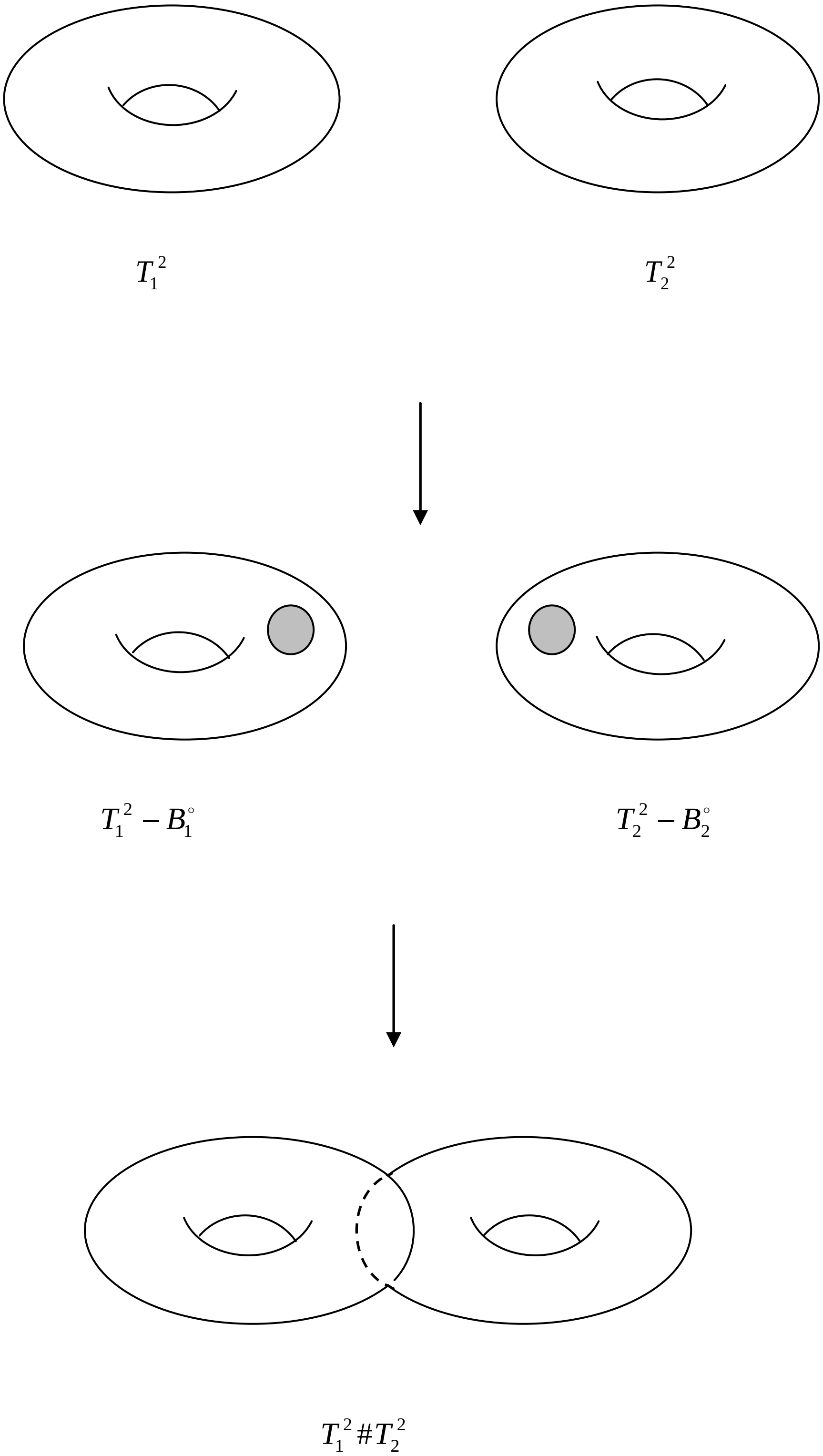
$M_1 \# M_2 = (M_1 - B_1^\circ) \cup_h (M_2 - B_2^\circ)$ ، [22] .

الجمع المترابط لعديـــدي الطيات M_1, M_2 يعتمد فقط على M_1, M_2 و لا يعتمد على اختيار الكرات B_i .

<u>أمثلة (1 – 5)</u> :

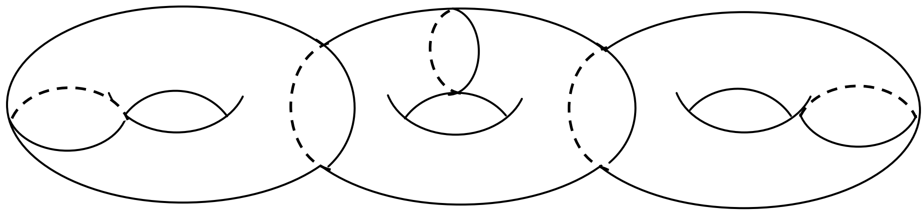
(أ) إذا كانت كـــلاً من S_1^2 و S_2^2 كرتين من البعد الثاني ، فإن $S_1^2 \# S_2^2$ سيكون متشاكل شكليًا مع S_1^2 .

(ب) إذا كـــان T_1^2 و T_2^2 ســـطـــحـــين كـــعكـــيـــين ، فـــإن $T_1^2 \# T_2^2$ هو عديد طـــيات أمـــلـــس مـــتـــراص من الـــبـــعـــد الثانـــي يـــســـمى السطـــح الـــكعكي الـــمزدوج (الـــسطح العـــقدي) (*double torus*) و يـــحـــتوي على مـــقـــبضين ، أنظر شكل (1 – 13) .



شكل (1 – 13)

إذا أخــذنا الجمع المترابــط للسطح الكعــكي المزدوج والسطح كعكي فإنه يعطي عديد طيات أملس من البعد الثــاني يحتوي على ثلاث مقابض كما في شكل (1 – 14) ، و هكذا يمكن إنشاء عديدات طيات من البعد الثاني لها أي عدد من المقابض .



عديد طيات أملس يحتوي على ثلاث مقابض

شكل (1 – 14)

(جـ) إذا كان P_1^2 و P_2^2 مستويي إسقــاط حقــيقــيين فإنه يمكن إيجاد الجمع المترابط لهما (قارورة كلاين) [22]،والذي بدوره يمكن جمعه جمعًا مترابطًا مع نسخة أخرى من مستوى الإسقاط فنحصل على عديدات طيات من البعد الثاني ولكن لا يمكن عمل نموذج لها في $\Re^3$.

يــجــب مــلاحــظــة أن عمــليــة الجمع الــمــترابــط لــلســطوح الـــمتراصة هي عـــملــية إبدالــية و تـــجميـــعية و لها عنـــصر مـــحايد S^n و لكنها لا تـــكـــون زمـــرة و ذلـــك لـــعـــدم وجـــود الـــمعكوس حـــيـــث لا يـــمكنـــنا طرح حـــدود من الجمع الـــمـــتـــرابـــط ، فـــعـــلى سبـــيل الـــمثال إذا كان لـــدينا $M_1 \# N \cong M_2 \# N$ فلا نستطيع طرح N من الطرفين لـــنحصل على $M_1 \cong M_2$ و لذلك فعملية الـــجمع الـــمترابط تشـــكل فقط ما يسمى بشبة الزمرة (*semigroup*) ، [22] .

تعريف (1 – 7) ، [22] :

جنس (*genus*) عديد الطيات هو عدد عـــديدات الـــطيات المجموعة جمعًا مترابطًا . إذا كان عديد الطيات موجه فإنه يرمز لجنس عديد الطيات بالرمز g ، و إذا كان عديد الطيات غـــير موجه فيرمز له بالرمز p . مع مـــلاحظة أن الجمع المترابط لعديدي طيات موجهين يعـــطي عديد طيات موجه ، بينما الجمع المترابط لعديدي طيات غير موجهين هو عديد طيات غير موجه .

(1 – 7) تصنيف عديدات الطيات الملساء

Classification of smooth manifolds

تصـــنيف عديدات الطيات الملساء يعـــني وضع قـــائمة بكل عديدات الطيات الملساء المتماثـــلة تـــفاضلـــيًا . بـــصورة أدق فإن قائـــمة تعني عائلة من عديدات الطيات الملساء M_λ ، حيث $\lambda \in \Delta$ بحيث أن :

1- $M_{\lambda_1} \cong M_{\lambda_2}$ إذا وإذا فقط كان $\lambda_1 = \lambda_2$.

2- إذا أعطي عديد طيات أملس M فإنه من الممكن تحديد λ عن طريق خوارزمية منتهية بحيث أن $M \cong M_\lambda$.

من غـــير المـــمكن تصنـــيف كل عديدات الطيات الملساء من أي بعد و لكننا فيما يلـــي سوف نـــقوم بدراسة تصنيف عديدات الطيات الملساء المتراصة و المترابطة من البعد الأول والثاني .

أولاً : تصنيف عديدات الطيات الملساء المتراصة والمـــترابطة من البعد الأول : أي عديد طيات أملس متـــراص و مترابط و بـــدون محيط من البعد الأول يكون متماثل تفاضليًا مع

الدائرة S^1 . أما إذا كان بمحيط فيكون متماثل تفاضليًا مع الفترة المغلقة .

ثانيًا: تصنيف عديدات الطيات الملساء المتراصة والمترابطة من البعد الثاني: كل عديد طيات أملس متراص و مترابط من البعد الثاني يكون متماثل تفاضليًا مع أحـــد الســـطوح التالية :

(أ) الكرة S^2 .

(ب) الجمع المترابط لعدد محدود g من السطوح الكعكية $T_1^2 \# T_2^2 \# ... \# T_g^2$.

(ج) الجمع المترابط لعدد محدود p من مستويات الإسقاط $P_1^2 \# P_2^2 \# ... \# P_p^2$.

في حالة (أ) و (ب) فـــإن السطوح تكون موجهـــة ، أما في حالة (ج) فإن السطوح تكون غير موجهة .

يمكن الاعتقاد من الوهلة الأولى أننـــا نستطيع الحصول على عديدات طيات ملساء من البعد الثاني غير موجودة في هذه القائمة عن طريق مـــثـــلاً أخذ الجمع المترابط لسطح كعكي مع مســـتوى إسقـــاط واحد أو أكثر و لكن السطح الناتج لـــيس بجـــديد حيث أن $T^2 \# P^2 \cong P^2 \# P^2 \# P^2$ [19] ، أي أن الجـــمع المتـــرابط لـــلسطوح الكعكـــية مع المستويات الإســـقاطية يمكن تحويلة إلى جمع مترابط لمستويات إسقاطية فقط.

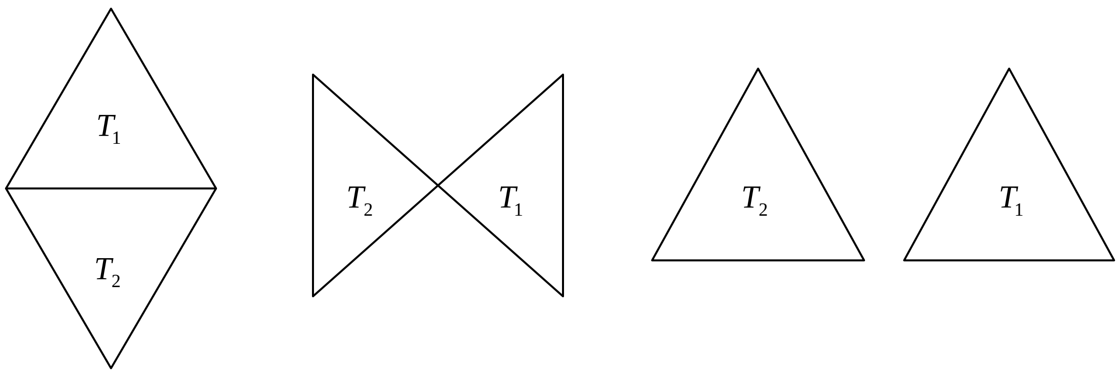
التصـــنيف السابق لعديدات الطيـــات المتراصة والمترابطة من البعد الثاني بدون محيط ممكن أن يعدل على السطوح المتراصة والمترابطة بمحيط كما يلي :

السطوح المتراصة و المترابط الملساء بمحيط تكون متماثلة تفاضليًا إما مع الكرة أو مع الجمع المترابط لعدد محدود من السطوح الكعكية أو مع الجـــمع المترابط لعدد محدود من مستويات الإسقاط بعد أن يزال منها عدد محدود من الأقراص المفتوحة ، [22] .

(1 – 8) تثليث عديدات الطيات الملساء
Triangulation of smooth manifolds

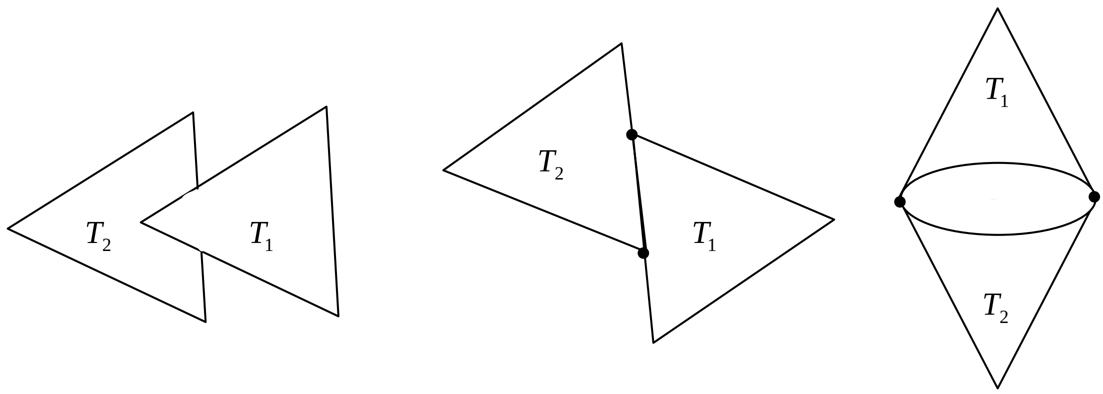
تعريف (1 – 8) ، [22] :

سوف نعرف في هذا الفصل تثليث عديدات الطيات الملساء المتراصة من البعد الثاني (السطوح المتراصة) . حيث أن تثليث السطح المتراص S يتكون من عائلة محدودة من المجموعات المغلقة $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ و التي تغطي S و عائلة من التشاكلات الشكلية $\varphi_i : T_i' \to T_i , \quad i = 1,2,...,n$ حيث كلاً من T_i' مثلث في المستوى $\Re^2$. المجموعات T_i تسمى مثلثات ، و المجوعات الجزئية من T_i التي تكون صور لرؤوس و أحرف المثلثات T_i' تسمى رؤوس (*vertices*) وأحرف (*edges*) على الترتيب . أخيرًا أي مثلثين مختلفين T_i, T_j يجب أن يكونا منفصلين أو متقاطعين في رأس مشترك بينهما أو متقاطعين في حرف مشترك بينهما ، انظر شكل (1 – 15) .



شكل (1 – 15)

الشكل (1 – 16) يوضح ثلاث حالات مرفوضة في تقاطع المثلثات .

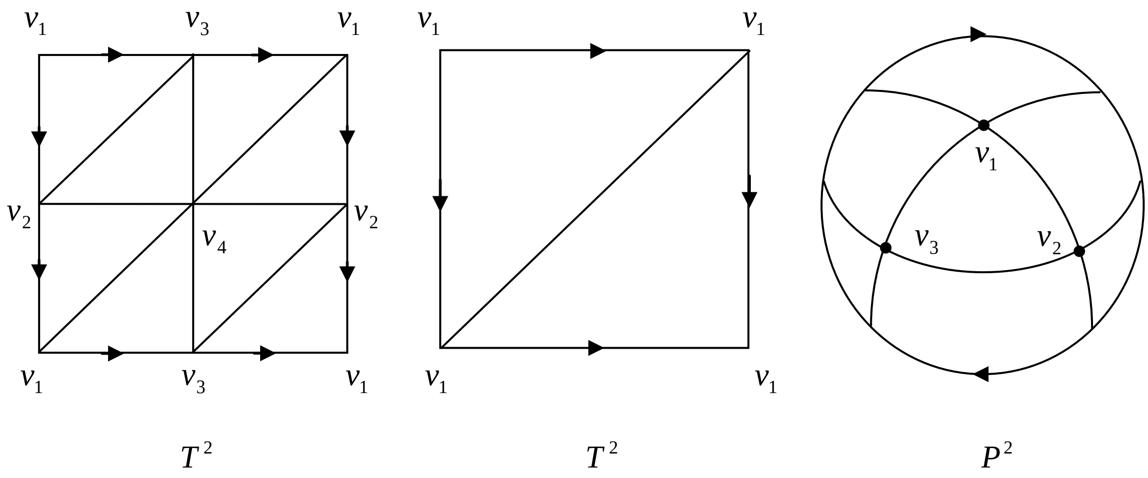


شكل (1 – 16)

أمثلة (1 – 6) :

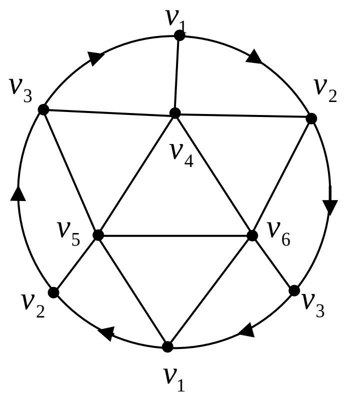
(أ) السـطح الهرمي في الفراغ الإقلـيدي الثلاثي $\Re^3$ هو سطح متشاكل شكليًا مع الكرة S^2، علاوة على ذلك مثلثاته الأربعة تحقق شروط التـثليث في S^2 .

(ب) شكل (1 – 17) يوضح بعض الأشكال التي لا تمثل تثليث للسطوح.

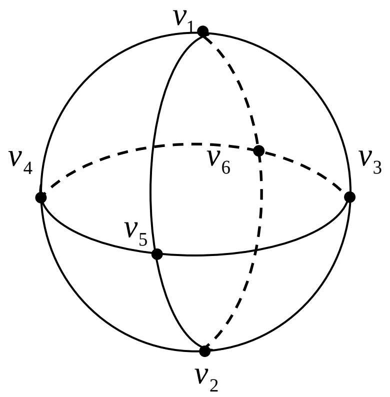


شكل (1 – 17)

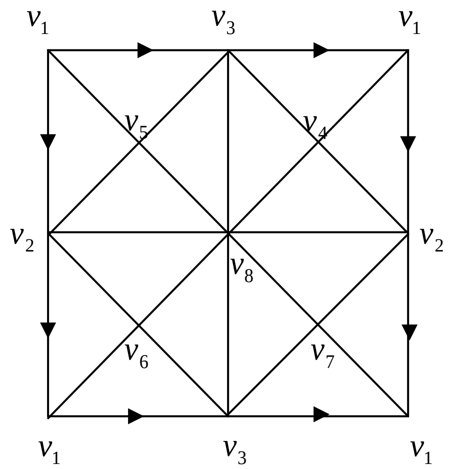
(جـ) شكل (1 – 18) يوضح تثليث لبعض السطوح المتراصة المعروفة .



تثليث لمستوى الإسقاط P^2



تثليث للكرة S^2



تثليث للسطح الكعكي T^2

شكل (1 – 18)

ملاحظة (1 – 2) ، [19]:

السطح يكون متراص إذا و إذا فقط كان أي تثليث له مكون من عـــدد مـــحـــدود من المـــثلثات ، و يكون مترابط إذا و إذا فقط أمكن ترتيب المثلثات $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ بحيث يمكن ربـــط كل مثلث ببقية المثلثات الموجـــــودة في القائمة بمسار يمر على أحرف بعض المثلثات .

تعريف (1 – 9) ، [22] :

إذا كان M سطـــح مـــتراص لـــه الـــتثليث $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ ، و α هي عدد الرؤوس (*vertices*) ، و β هي عدد الأحرف (*edges*) ، و γ عدد الأوجه (المثلثات) (*faces*) في M ، فإن :

$$e(M) = \alpha - \beta + \gamma$$

يسمى بعدد أويلر المميز للسطح M (*Euler characteristic of the surface*) .

أمثلة (1 – 7) :

يمكن حساب عدد أويلر المميز للسطوح الموضحة في شكل (1 – 18) كما يلي :

(أ) الكرة S^2 :

$$\alpha = 6, \beta = 12, \gamma = 8 \Rightarrow e(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$$

(ب) مستوى الإسقاط P^2 :

$$\alpha = 6, \beta = 15, \gamma = 10 \Rightarrow e(P^2) = 6 - 15 + 10 = 1$$

(جـ) السطح الكعكي T^2 :

$$\alpha = 9, \beta = 27, \gamma = 18 \Rightarrow e(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$$

ملاحظات (1 – 3) ، [22] ، [15] :

(أ) إذا كـــان M_1, M_2 سطـــحان مـــتراصان فإن : $e(M_1 \# M_2) = e(M_1) + e(M_2) - 2$.
باستخدام هذه الخاصية فإنه من الممكن حســـاب عدد أويلر المميز لأي سطح متراص كما هو موضح في جدول (1 – 1).

السطح	عدد أويلر المميز
الكرة S^2	2
الجمع المترابط لعدد g من السطوح الكعكية $\#^g T^2$	$2-2g$
الجمع المترابط لعدد p من مستويات الإسقاط $\#^p P^2$	$2-p$
الجمع المترابط لمستوى إسقاط مع عدد g من السطوح كعكية $P^2 \#^g T^2$	$1-2g$
الجمع المترابط لقارورة كلاين مع عدد g من السطوح كعكية $K^2 \#^g T^2$	$-2g$

جدول (1 – 1)

(ب) إذا كـــان M سطح مـــتراص له عدد أويلر $e(M)=\alpha-\beta+\gamma$ فإنه يحقق العلاقات التالية :

$$\left.\begin{array}{l}\beta \le \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\\ 3\gamma = 2\beta \\ \alpha-\beta+\gamma = e(M)\end{array}\right\} \qquad (1-1)$$

من العلاقات السابقة نحصل على

$$\alpha^2 - 7\alpha + 6e(M) \ge 0$$

و هذا يكافئ أن

$$\alpha \ge \frac{1}{2}(7+\sqrt{(49-24e(M)}) \qquad (1-2)$$

العلاقة $(1-2)$ تعطي الحد الأدنى لعدد الرؤوس اللازم لتثليث أي سطح فعل سبيل المثال إذا اعتبرنا ســـطح الكرة الذي له عدد أويلر $e(M)=2$ ففي هذه الحالة فإن الحد الأدنى لعدد الرؤوس اللازم لتثليث سطح الكرة هو :

$$\alpha \ge \frac{1}{2}(7+\sqrt{(49-24(2)}) = 4$$

أي أن أقل عدد من الروؤس التي يمكن أن تمثل تثليث لسطح الكرة هو 4 رؤوس . و بالمثل نجد أن الحد الأدنى لعدد الرؤوس الـــلازم لتثليث السطح الكعكي هو $\alpha \ge 7$، و الحد الأدنى لعدد الرؤوس اللازم لتثليث مستوى الإسقاط هو $\alpha \ge 6$.

الباب الثاني

عديدات الطيات الريمانية و الجيوديسيات و المخططات

Riemannian manifolds , geodesics and graphs

الباب الثاني

عديدات الطيات الريمانية و الجيوديسيات و المخططات

Riemannian manifolds , geodesics and graphs

قد نحتاج أحيانًا لقياس المسافة أو الزوايا أو أطوال المنحنيات و غيرها لعديد طيات ما. و هذه المفاهيم يمكن أن تعرف جيدًا إذا أخذت على عديدات طيات ريمانية .

في هذا الباب تناولنا أولاً مفـــهوم عديدات الطيات الريمانية و التي بالضرورة تتطلب التعرض لمتجهات المماس و فـــراغات المماس . ثم استـــعرضنا بعض المفاهيم الأساسية مثل الارتباط الـــتآلفي و الانتقال المتوازي حتى نتمكن من تعريف الجيوديسيات . أما في الجزء الثاني من هذا الباب استعرضنا بعض الخصائص و الأنواع الهامة للمخططات التي نحن بحاجة إليها في هذه الرسالة .

(2 – 1) متجهات المماس و فراغات المماس

Tangent vectors and tangent spaces

إذا كان M عـــديد طيات أملـــس من بعد m ، $p \in M$ نعتبر $C^{\infty}(M)$ مجموعة كل الدوال الملساء ذات القيمة الحقيقية (*real valued functions*) المعرفة في جوار p ، فإذا كان $f \in C^{\infty}(M)$ فـــإنه يوجد جوار U_f (U_f يعتمد على f) عند p بحيث تكون f معرفة و ملساء على U_f .

تعريف (2 – 1) ، [17] :

المتجه المماس (*tangent vector*) X_p لعديد الطيات التفاضلي M عند النقطة $p \in M$ هو راسم من $C^{\infty}(M)$ إلى $\Re$ يحقق الخواص التالية :

$1 - X_p(f) \in \Re \quad , \quad \forall f \in C^{\infty}(M)$.

$2 - X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g) \quad , \quad \forall a, b \in \Re \quad and \quad f, g \in C^{\infty}(M)$.

$3 - X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$.

أي أن المتجه المماس هو دالة خطية و يحقق خاصية ليبنتز (*Leibnitz property*) .

مجـــموعة المتجهات المماسية لعديد الطيات M عند النقطة p يرمز لها بالرمز T_pM تشكل فراغ متجه على $\Re$ بحيث أن :

$1 - (X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f \quad , \quad \forall X_p, Y_p \in T_p(M) \quad and \quad f \in C^{\infty}(M).$

$2 - (aX_p)f = a(X_p f) \quad , \quad a \in \Re.$

يســـمى هذا الفراغ بالفراغ المماس (*tangent space*) لعديد الطيات M عند النقطة p وهو فراغ جزئي متجه من $T_p\Re^n$ و من نفس بعد عديد الطيات M ، [18] .

الحزمة المماسية (*tangent bundle*) TM هي مجموعة من الأزواج (p, X) بحيث أن $p \in M$ و $X \in T_pM$ ، أي أن $TM = \{(p, X) : p \in M, X \in T_pM\}$.

2 – 2) عديدات الطيات الريمانية Riemannian manifolds

عديد الطيات الريمـــاني M هو عديد طيات أملس معرف على فراغ المماس عند كل نقطـــة عليه دالة المتري $<,>$ ذات قيمة حقيقية ، و متماثلة (*symmeticr*) ، وثنائية الخطية (*bilinear*) ، و موجبة بالتحديد (*positive definite*) على الأزواج المرتبة من المتجهات المماسية . أي إذا كـــانت $X, Y, Z \in T_p(M)$ فإن $< X, Y >$ عـــدد حـــقـــيقي و الدالة

$<,>: T_p(M) \to \Re$ تحقق الخواص التالية [17] :

(أ) **متماثلة :**

$$< X,Y > = < Y,X >$$

(ب)**ثنائية الخطية :**

$$< X+Y,Z > = < X,Z > + < Y,Z >$$

$$< aX,Y > = a < X,Y >, \quad \forall a \in \Re$$

(جـ) **موجبة بالتحديد :**

$$< X,X > > 0, \forall X \neq 0,$$

$$< X,X > = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

(د) إذا كان X,Y حقلين أملسين مجالهما A فإن $< X,Y >_p = < X_p,Y_p >$ دالة ملساء على A.

إذا استبدلنا الشرط (جـ) بالشرط التالي:

(هـ) **غير شاذة** (non singular) :

$$< X,Y > = 0, \forall X \Rightarrow Y = 0$$

فإن M يسمى عديد طيات شبه ريماني (*semi – Riemannian manifold*) .
دالة المتري $<,>$ تسمى ممتد متري (*metric tensor*) ، أو الضرب الداخلي (*inner product*) ، أو متري ريماني (*Riemannian metric*) لعديد الطيات M و يرمز له بالرمز g . تعيين الضرب الداخلي $<,>$ لفراغات المماس تسمى البنية الريمانية (*Riemannian structur*) على عديد الطيات M ، و الهندسة الناتجة تسمى بالهندسة الريمانية . عديد الطيات M مع المتري الريماني يسمى عديد طيات ريماني .

ملاحظة (2 – 1) : ، [27] .

إذا كانت المتجهات $\frac{\partial}{\partial u^i}=\partial_i$ هي متجهات الأســـاس لفراغ المماس T_pM بالنسبة لنظام الأحدثيات المحلية u^i فإن الضرب الداخلي لأي متجه أساس يكتب على الصورة :

$$<\partial_i,\partial_j>=g_{ij} \qquad (2-1)$$

g_{ij} يسمى ممتد القـــياس الريمـــاني (*tensor*) ، أما الضرب الداخـــلي لأي متـــجهـــين $X,Y\in T_p(M)$ فهو :

$$<X,Y>=g_{ij}X^iY^j \qquad (2-2)$$

كـــذلك فإن مـــربع عنصر المتري (*metric element*) أو ما يسمى مربع عنصر الطول (*line element*) يعرف كالتالي

$$ds^2=g_{ij}du^idu^j \qquad (2-3)$$

و إذا كان $<X,Y>=0$ فإن المتجهان X,Y يكونا متعامدان بالنسبة للضرب الداخلي .

تعاريف (2 – 2) :

(أ) الفراغ الإقليدي $\Re^n$ يمكن إعـــطاءه بنية ريمانية خـــاصة تسمى البنية الريمانية المنبسطة القـــياســـية (*flat Riemannian structure*) و ذلـــــك بإعتبار أن الضـــــرب الداخلي $<u,v>=\sum_{i=1}^{n}u^iv^i$ هو الضرب القياسي المعتاد .

(ب) إذا كان M,N عديدي طـــيات ريمانـــيان ، فإنه يقال عن دالة التـــماثل التفاضـــلي $f:M\to N$ أنها تقايس (*isometry*) إذا كان :

$$<X,Y>_p=<d_pf(X),d_pf(Y)>_{f(p)},\ p\in M,\quad X,Y\in T_p(M)$$

أي أن الدالة f ستحافظ على المتري تقايسيًا . في هذه الحالة يقال لعديدات الطيات الريمانية M,N أنها متقايسة .

(جـ) إذا كانـــت الـــدالة $f:M^n \to N^{n+k}$ انغماس فإن f تكون قابلة للتفاضل و الدالة $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ أحـــادية لكل $p \in M$ ، فإذا كانت N لها بنية ريمانية فإن f تنتج بنية ريمانية على M معرفة كما يلي :

$$< X,Y >_p =< d_p f(X), d_p f(Y) >_{f(p)} , \quad X,Y \in T_pN$$

هذا المتري على M يســـمى بالمتري المستحث (*induced*) بالدالة f ، و تسمى الدالة f بالانغماس المتقايس (*isometric immersion*) .

2-2-1) الطول و الزاوية و المسافة **Length , angel and distance** :

مفاهيم الطول و الزاوية والمسافة يصبح لها معنى جيد في الحالة الريمانية ، و هي تعرف كما يلي:

(أ) يعرف طول أي متجه مماس $X \in T_p(M)$ كما يلي :

$$\|X\| =< X, X >^{\frac{1}{2}} \qquad (2-4)$$

(ب) الـــزاوية θ بـــين متجهين غير صفريين $X,Y \in T_p(M)$ هي العدد θ المحصور بين 0 و π بحيث أن :

$$\cos\theta =< X,Y > /(\|X\|\|Y\|), 0 < \theta < \pi \qquad (2-5)$$

وهذا المقدار معرفًا تعريفًا جيدًا و ذلك لأن $|< X,Y >| \leq \|X\|\|Y\|$.

(جـ) طول الـــمنحنى $\gamma :[a,b] \to M$ و يرمـــز له بالرمز $|\gamma|$ أو $L(\gamma)$ هو تـــكامل أطـــوال متجهات السرعة للمنحنى γ ، أي أن :

$$L(\gamma) = \int_a^b | \gamma^* | \, dt$$

يجب أن نشير إلى أن طول المنحنى لا يعتمد على التمثيل البارمتري له ، [2] .

(د) الـــمسافة بين النقطتين p,q على عديد الطيات الريماني M يرمز لها بالرمز $\rho(p,q)$ هي أكبر حد سفلي (*greatest lower bound*) لأطوال المنحنيات التي يمكن رسمها من النقطة p إلى q أي أن :

1- $\rho(p,q) \le L(\gamma)$ لأي منحنى γ من النقطة p إلى q .

2- توجد منحنيات تربط النقطتين p,q طولها قريب من $\rho(p,q)$ أو حتى يساويه ، و عليه فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد منحنى γ من p إلى q بحيث أن:

$$L(\gamma) - \varepsilon < \rho(p,q)$$

دالة المسافة ρ تحقق الخصائص التالية :

(أ) موجبة :

$$\rho(p,q) \ge 0$$

(ب) متماثلة :

$$\rho(p,q) = \rho(q,p)$$

(جـ) تحقق المتباينة المثلثية :

$$\rho(p,q) \le \rho(p,r) + (r,q)$$

(د) غير مضمحلة (*non degeneracy*) :

إذا كانت $\rho(p,q) = 0$

فإن $p = q$

بناءًا على ذلك فإن (M,ρ) تكون فراغ متري (توبولوجي) (*metric space*) .

(2 – 3) الارتباط التآلفي **Affine connexion**

من الممكن تقديـــم نوع من الاشتقاق على عديدات الطيات يسمى بالمشتقة المتغايرة (*covariant differentiation*) ، و إذا تـــم ذلـــك فإنه يقال أن عديد الطيات له ارتباط تآلفي أو أن عديد الطيات مرتبط تآلفيًا (*affinely connected*) .

حتى نعرف الارتباط التآلفي تعريفًا دقيقًا يجب أولاً أن نعرف الحقول المتجهة.

تعريف (2 – 3) ، [2] :

الحقل المـــتجه V (*vector field*) على عديد طيات أملس M هو راســـم يعين لكل نقطة $p \in M$ مـــتجه مماس $X_p \in T_pM$ ، أي أن $V: M \to TM$ ، و يقال أن حقل المتجه أملس على M إذا كـــان الراسم $V: M \to TM$ راسم أملس . يتضح من هذا التعريف أن الحـــقل المتجه على عديد الطيـــات الأملس هو اشتقاق و هو مؤثر خطي يؤثر على حاصل ضرب دالتين كالتالي:

$$V(fg) = f(Vg) + (Vf)g \quad , \quad \forall f, g \in C^\infty(M) \qquad (2-6)$$

حـــيث $C^\infty(M)$ هـــي مجموعـــة الـــدوال الحـــقيقية ، Vf تـــعني مشـــتقة الاتـــجـــاه (*directional derivative*) لـــلدالة f في اتجاه V و تمثل دالة ذات قيمة حقيقية على M تعطى بالعلاقة :

$$(Vf)(p) = V_p(f) \quad , \quad \forall p \in M \qquad (2-7)$$

يرمز لفراغ الحقول المتجهة الملساء على عديد الطيات M بالرمز $\aleph(M)$.

تعريف (2 – 4) ، [4] :

إذا كان M عديد طيات أملس فإن الارتباط التآلفي على M هو راسم يرمز له بالرمز ∇ يعين لكل زوج V,W من حقول المتجه الملساء على M حقل متجه آخر أملس $\nabla_V W$ أي أن :

$$\nabla : \aleph(M) \times \aleph(M) \to \aleph(M) \quad ,$$

$$\nabla(V,W) = \nabla_V W \in \aleph(M) \qquad (2-8)$$

بحيث تحقق الخواص التالية :

$$\forall V,W,Z \in \aleph(M) \quad , \quad \forall f,h \in C^{\infty}(M)$$

$$1-\nabla_V (W+Z) = \nabla_V W + \nabla_V Z \quad ,$$

$$2-\nabla_{(fV+hW)} Z = f\nabla_V Z + h\nabla_W Z \quad ,$$

$$3-\nabla_V (fW) = (Vf)W + f\nabla_V f \quad .$$

الحقل المتجـــه $\nabla_V W$ يسمى مشتقة متغايرة (*covariant derivative*) للحقل W في اتجاه الحقل V و هو يقيس معدل تغير الحقل W عندما يتحرك في اتجاه الحقل V .

نفرض أن ∇ ارتباط تآلفي على M ، و $\alpha : N \to M$ راسم أملس . إذا كان V حقل متجه أملس على M و كان $X \in T_p M$ فإنه يمكن تعريف رابط تآلفي آخر $\alpha^* \nabla$ على α كما يلي :

$$(\alpha^* \nabla)_X (V \circ \alpha) = \nabla_{\alpha \cdot X} V \tag{2-9}$$

يســـمى الارتـــباط الـــتآلفي $\alpha^* \nabla$ على α بـــالارتـــباط التآلفي المســـتحث بالارتباط التآلفي ∇ ، [2] .

أيضًا إذا كان M عديد طيات أملس مـــعرف عليه الارتباط التآلفي ∇ فـــإنه يوجد تقـــابل وحيد يعين لكل حقل متجه V على امتداد المنحنى الأملس $C : I \subset \Re \to M$ حقل متـــجه آخر $\frac{DV}{du}$ على C يسمى المشتقة المتغايرة للحقل V على امتداد المنحنى C بحيث يحقق التالي :

$$1-\frac{D}{du}(V+W) = \frac{DV}{du} + \frac{DW}{du} \tag{2-10}$$

$$2-\frac{D}{du}(fV) = \frac{Df}{du}V + f\,\frac{DV}{du} \tag{2-11}$$

حيث W هو حقل متجه على امتداد المنحنى C ، f دالة ملساء معرفة على I .

ملاحظة (2 – 2) :

إذا كـــان M هو الـــفراغ الإقليدي فإن المـــؤثر التفاضلي ∇ سينطبق على التفاضل العادي $\{\partial_i\}$.

(2 – 4) الانتقال المتوازي Parallel translation

مفهوم الانـــتقال المتوازي لمتجهات المماس على طول منحنى مفهوم رئيس وهو مرتبط بطريـــقة طبيعية بـــفكرة إيجاد طول المتجه . لمعرفة معنى ذلك بصورة أوضح سوف نتصور منحني على سطح في $\Re^3$ مع مماس للسطح عند النقطة الابتدائية للمنحنى . بصورة عامة هذا المماس لا يمكن دفعه على طول المنحنى بحيث يبقى متوازيًا في $\Re^3$ على أن يكون دائمًا مماسًا لـــلسطح . على كل حـــال يمكن أن نفرض أنه مهما دار المـــماس فيجب أن يكون مماسًا للسطح، و بحيث يكون معدل تغير المماس هو متجه عـــمودي على السطح عند أي نقطة. فيما يلي سوف نعطي تعريف الانتقال المتوازي .

تعريف (2 – 5) ، [2]:

ليكن M عديد طيات له ارتباط تآلفي ∇ متري $\alpha : N \to M$. يقال أن حقل المتجه V على α متوازي عند النقطة $p \in N$ إذا كان لكل $X \in T_pN$ فإن :

$$\nabla_X V = 0 \qquad (2-12)$$

الحقل المتجه V يكون متوازي إذا كان V متوازي عند كل نقطة $p \in N$.

(2 – 5) الجيوديسيات Geodesics

في الفراغـــات الريمانية توجد منحنيات تعتبر تعميم لمفهوم الخط المستقيم في الفراغات الإقلـــيدية تسمى هذه المنحنيات بالجـــيوديسيات (*geodesics*) و هي منحنيات أقصر بعد بين نقطتين على عديد الطيات و تعرف كما يلي :

تعريف (2 – 6) :

يقال أن المنحنى الأملس $C(u)$ والذي يسمى منحنى أقصر بعد بين نقطتين على عديد الطيات الريماني M أنه منحنى جيوديسي إذا كان حقل متجهات المماس على امتداد المنحنى $C(u)$ متوازي ، أي إذا كان :

$$\frac{D}{du}(\frac{dC}{du}) = 0 \quad , \quad \forall u \in I \qquad (2-13)$$

تعاريف (2 – 7) ، [17] ، [1] ، [3] ، [23] :

(أ) إذا أمكن تمـــديد كل جيوديسي تمـــديد لا نهائي لكل $u \in \Re$ فإن الارتباط ∇ يسمى كامل (*complete*) .

(ب) عديد الطيات الريمـــاني يكون كامل إذا كان كامل كفراغ متري ، أي إذا كانت كل متتابعة كوشي (*Cauchy sequence*) تقاربية . في هذه الحالة تكون كل الجيوديسيات قابلة للتمديد لا نـــهائيًا ، وكل نقطتين $m,n \in M$ يـــمكن ربطهـــما بجيوديسي طوله هو $\rho(m,n)$.

(جـ) ليكن M عديد طيات جزئي من عديد طيات ريماني N له بنية ريمانية مستحثه . إن M يسمى عديد طيات جزئي جيوديسي تام (*totally geodesic*) إذا كان كل جيوديسي في M هو جيوديسي في N .

(د) المنحني التفاضـــلي المتقطع (*piecewise differentiable curve*) أو المسار المتقطع هو راســـم متصل $\gamma:[a,b]\to M$ من الفـــترة المغلقة $[a,b]\subset\Re$ إلى عديد طيات ريماني أملس M يحقق الشرط التالي :

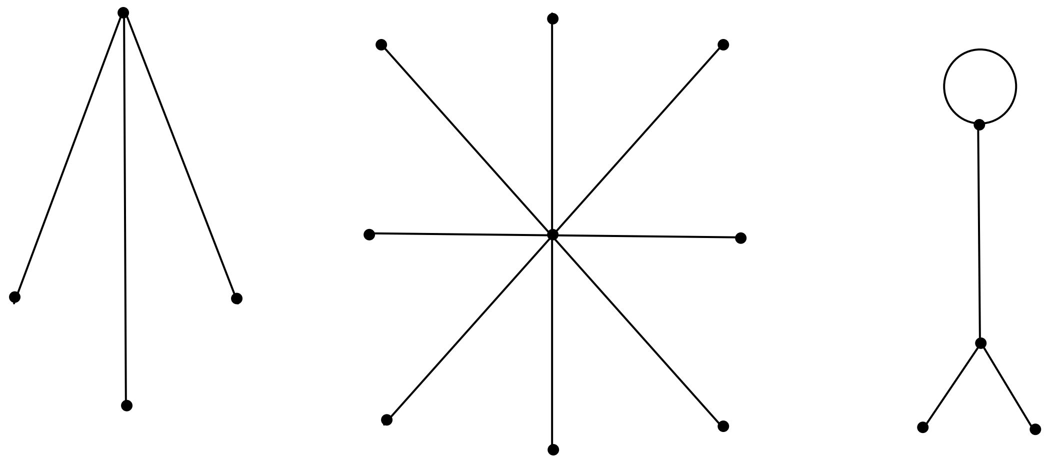
يـــوجد تـــقسيم $a=a_0<a_1<a_2<...<a_r=b$ لـــلفترة $[a,b]$ بـــحيث يكون التقيـــيد $\gamma|\ [a_{i-1},a_i],\quad i=1,2,...,r$ تفاضلي . يقال للمنحنى γ في هذه الحالة أنه يصل بين النقطتين $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ ، و يسمى $\gamma(a_i)$ رأس للمنحنى γ .

(هـ) يقال للمسار $\gamma:[a,b]\to M$ أنه مسار جيوديسي متقطع (*piecewise geodesic*) إذا أمكن تقسيم الفترة المغلقة $[a,b]$ كمـــا يلي : $a=a_0<a_1<a_2<...<a_r=b$ بحيث يكون التقييد $\gamma|\ [a_{i-1},a_i],\quad i=1,2,...,r$ قطع جيوديسية في M .

(2 – 6) المخططات Graphs

تعريف (2 – 8) ، [15] :

المخطـــط G هو الزوج (V,E) حيث V مجموعة محدودة و E مجموعة الأزواج غير المرتبة من عناصر المجموعة V المختلفة . إذن عنـــاصر المجموعة E تكون على الشكل $\{v,w\}$ حيث $v,w\in V$ و $v\neq w$. عناصر المجـــموعة V تسمى الرؤوس (*vertices*) ، و يســـمى العنصر $\{v,w\}$ من عناصر المجموعة E بالحرف (*edge*) الذي يربط الرأسيين v,w أو w,v . تمثل رؤوس المخطط بنقاط و الأحرف بأقواس أو قطع مستقيمة ، شكل (2 – 1) .



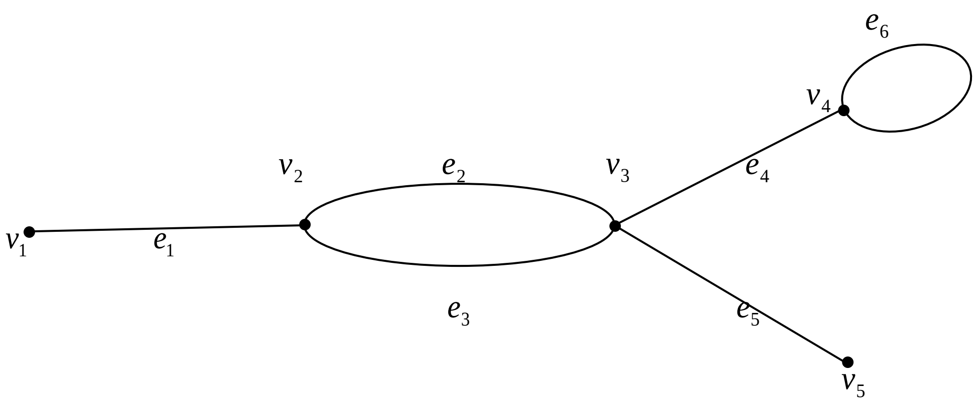
(أ) (ب) (ج)

أمثلة على المخططات

شكل (2 - 1)

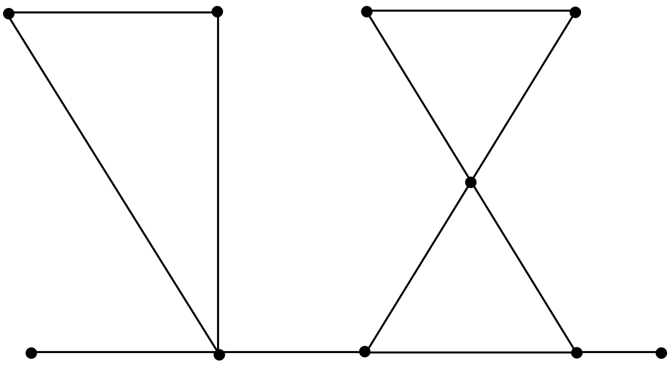
يرمز لمجـــموعة رؤوس المخطـــط G بالرمز $V(G)$ ، و لمجموعة أحرفه بالرمز $E(G)$. يقال لمخطط أنه محدود (*finite*) إذا كانت كل من المجموعتين $V(G),E(G)$ محدودتين ، أما إذا كانت غـــير ذلك يـــسمى المخطط غير محدود (*infinite*) . إذا كانت المجموعة $E(G)$ مـــجموعة خالية فإننا نحصل على مخطط مكون من رؤوس فقـــط ، أما إذا كانت المجموعة $V(G)$ مجموعة خالية فبالتالي المجموعة $E(G)$ تكون مجموعة خالية وبذلك نحصل على مخطط خالي .

إذا كان $v,w \in V(G)$ و يصــل بيــنهما حرف e فيقال أن الرأسين v,w متجاورين (*adjacent*) ، و يقال أيضًا أن الحرف e ملازم (*incident*) لــلرأسين v,w . و يقال عن حرفين أنهما متجاورين إذا و إذا فقط كان لهما رأس مشترك . و إذا وجد أكثر من حرف يربط بين نفس الرأسين فيقال عنها أحرف مــزدوجة (*multiple edges*) . الحرف الذي يربط الرأس بنفسه يسمى عقدة أو لفة (*loop*) . على سبــيل المثال شكل $(2-2)$ يمثل مخطط نجد فيه أن الحرف e_6 يكون عــقدة ، و الحرفان e_3,e_2 هي أحرف مزدوجة ، أيضًا الرأسيــن v_3,v_4 رأسين متجاورين و الحرف e_4 ملازم لــهما ، و الحرفين e_5,e_2 حرفين متجاورين .



شكل $(2-2)$

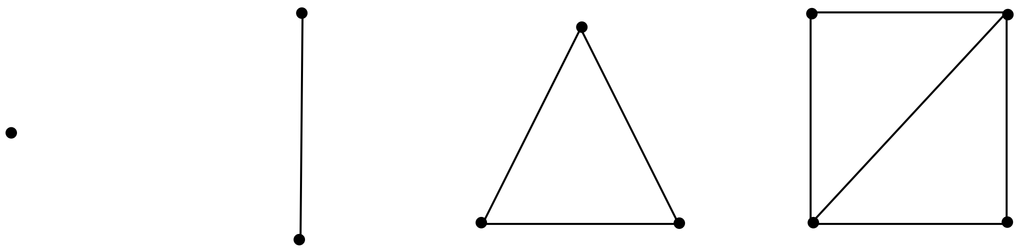
المخطط الذي لا يــحتوي على أي عــقد أو أحرف مزدوجة يسمى مخطط بــسيط (*simple graph*) ، أنظر شكل $(2-3)$ ، في الواقع المخطط الــبسيط الذي يحتوي على عدد n من الرؤوس يكون له على الأكثر عدد $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ من الأحرف .



مثال على مخطط بسيط

شكل (2 - 3)

المخطط البسيط الذي يحتوي الحد الأقصى من الأحرف يسمى مخطط كامل (*complete graph*) و يرمز له بالرمز K_n (حيث n عدد رؤوس المخطط) ، و في هذه الحالة كل زوج من الرؤوس في المخطط يوجد بينها حرف ،أنظر شكل (2 – 4) ، [19] .



K_1 K_2 K_3 K_4

أمثلة على المخطط الكامل

شكل (2 - 4)

عدد رؤوس المخطط G تسمى درجة المخطط (***order of G***) و يرمز لها بالرمز $|V|$
و عدد أحرف المخطط تسمى سعة المخطط (***size of G***) و يرمز لها بالرمز $|E|$.

تعريف (2 – 9) :

المخطـــط G يسمى مخطط مترابط (***connected graph***) إذا وجد مسار يصل بين كل رأسين في G و ما عدا ذلك يسمى مخطط غير مترابط .

تعريف (2 – 10) ، [31] :

ليـــكن G مخطـــط بسيط ، و ليـــكن v رأس في المخطـــط G . رتبة الـــرأس v (***degree or valency***) التي يرمز لها بالرمز $d(v)$ هي عدد الأحرف الملازمة لهذا الرأس .
إذا كان الرأس مـــعزول (***isolated***) أي غير مرتبط بأي حـــرف فإن رتبته تساوي صفر .
يسمى الرأس الذي رتبـــته تساوي واحد رأس متدلي (***pendant***) مع الأخذ في الاعتبار أن اللفة تضيف إلى رتبة الرأس 2 .

ملاحظات (2 – 3) ، [30] :

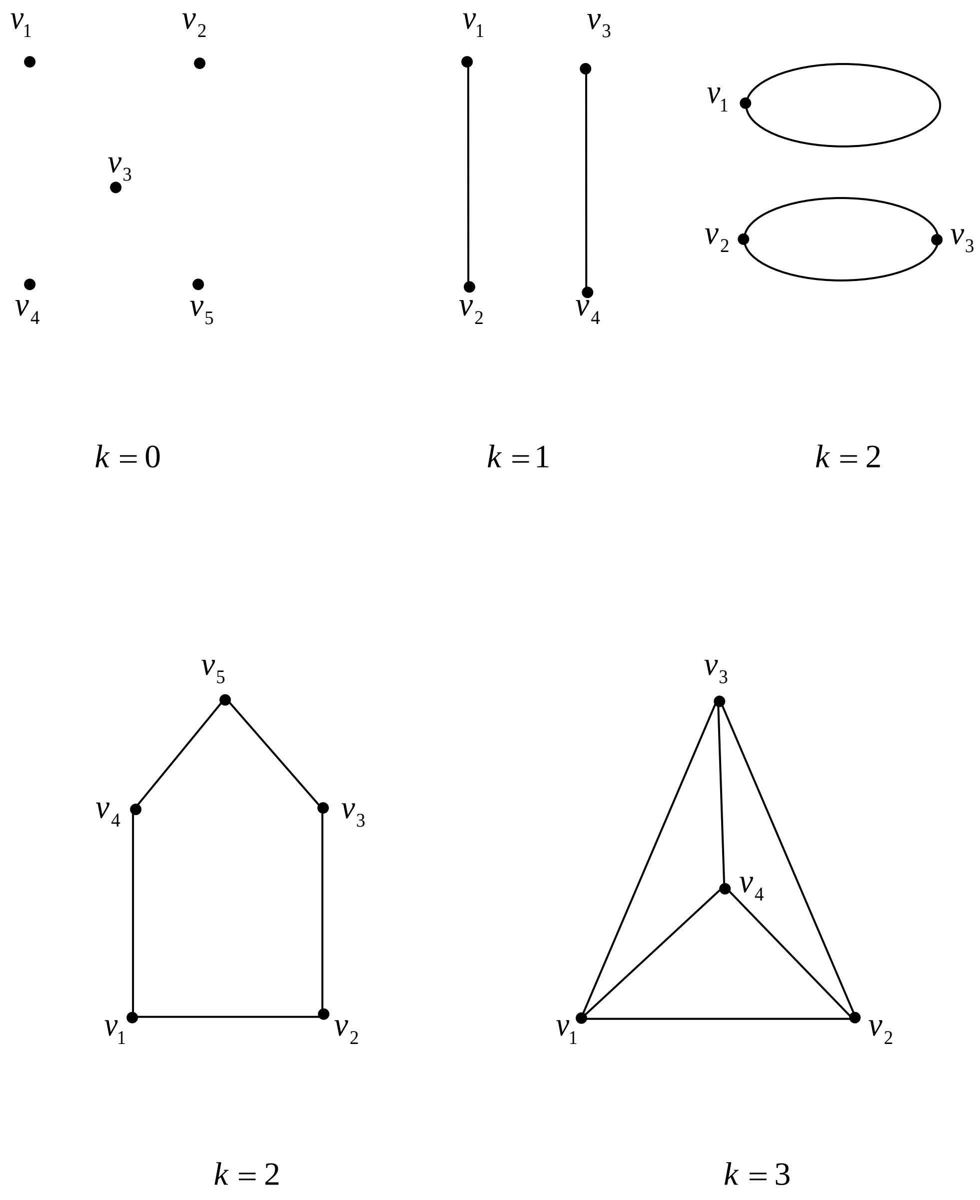
(أ) مجموع كل الرتب لجميع رؤوس المخطط البسيط هي ضعف عدد الأحرف في المخطط ، أي أن :

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E| \qquad (2-14)$$

و هذا راجع إلى أن كل حرف e يصل بين رأسين v,w في G يعد مرتين مرة عند حساب رتبة الرأس v و أخرى عند حساب رتبة الرأس w .
(ب) في أي مخطط G ، عدد الرؤوس التي لها رتبة فردية هو عدد زوجي .

تعريف (2 – 11) :

يقال لمخطط G أنه منتظم (*regular graph*) إذا كانت جميع رؤوسه لها نفس الرتبة k شكل (2 – 5) يبين بعض المخططات المنتظمة .



شكل (2 – 5)

(2 – 7) المخططات المتماثلة **Isomorphic graphs**

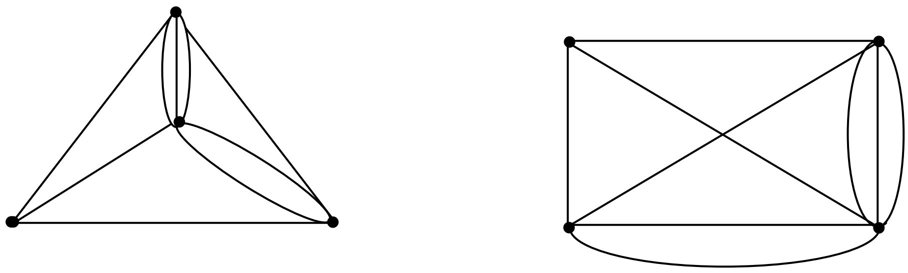
<u>تعريف (2 – 12)</u> ، [15] :

يقـــال عن مخططين G,H أنهما متمـــاثلان و نكتب $G \cong H$ إذا وجدت دالة تناظر أحـــادي $f:V(G) \to V(H)$ من مـــجموعة الرؤوس في G إلى مـــجموعة الـــرؤوس في H بحيث أن :

$$\{v,w\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} \in E(H)$$

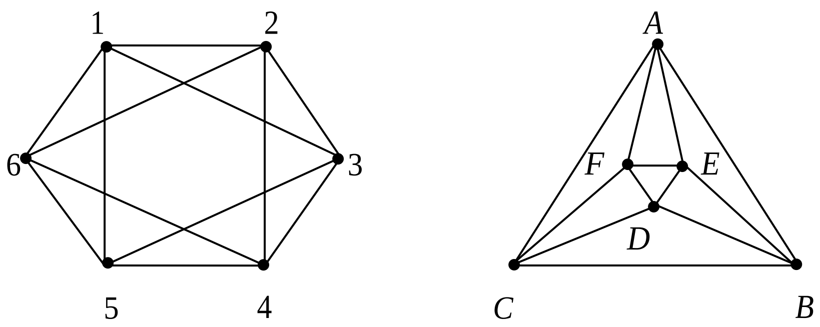
و بمـــعنى آخر يقال عن مخططين G,H أنهما متماثلان إذا وجدت دالة تناظر أحادي بيـــن رؤوس G و رؤوس H بحيـــث أن عدد الأحرف الذي يربط بين أي رأسين في G يـــساوي عدد الأحرف الذي يربـــط بين أي رأسين مناظرين لهما في H . أي إذا أمكننا الحصول على المخطط H من المخطط G عن طريق إعادة تـــسمية (*relabeling*) رؤوسه.

يجـــب أن نلاحظ أن أي مخططين كاملين لهما نفس عدد الرؤوس n يكونا متماثلين . عند التحقق من أن أي مخططين متماثلين يجب أن نحدد أولاً الرؤوس المتناظرة في المخططين بغض النظر عن أسماء الرؤوس المستخدمة . عل سبيل المثال شكل (2 – 6) يوضح مخططين متماثلين رووسهما غير مسماة .



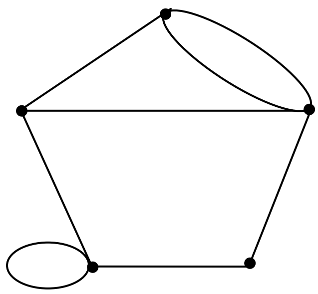
شكل (2 – 6)

و شكل (2 – 7) يوضح مخططين متماثلين رؤوسهما مسماة .

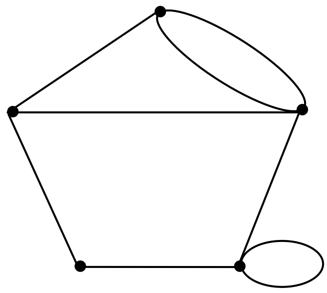


شكل (2 – 7)

حيث $1 \leftrightarrow A, 2 \leftrightarrow B, 3 \leftrightarrow C, 4 \leftrightarrow D, 5 \leftrightarrow E, 6 \leftrightarrow F$. أما شكل (2 – 8) فيوضح مخططين غير متماثلين و ذلك لأن الرأس الذي رتبته تساوي 2 في المخطط (أ) مرتبط برأسين رتبتهما تساوي 4 في حين أنه في المخطط (ب) مرتبط برأس رتبته تساوي 3 و رأس رتبته تساوي 4 .



(أ)

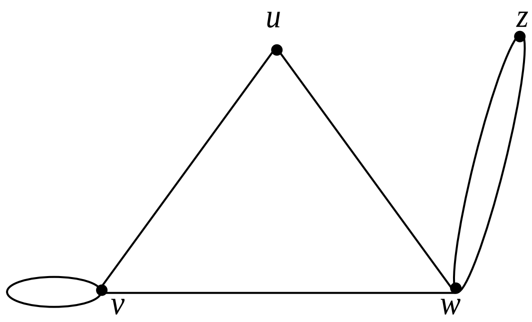


(ب)

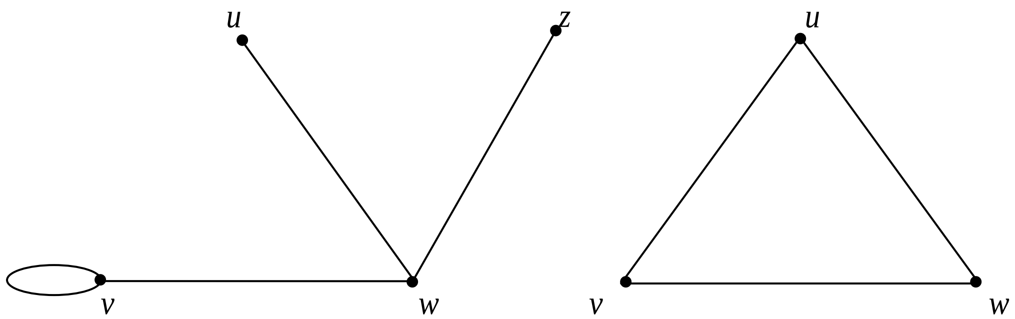
شكل (2 - 8)

(2 – 8) المخططات الجزئية Subgraphs

يســـمى المخطـــط H مخطط جزئي (*subgraph*) من المخطط G إذا كانت مجموعة رؤوسه مجـــموعة جزئية من مجموعة رؤوس المخطـــط G أي إذا كان $V(H) \subseteq V(G)$. المخطط الجزئي H من المخطط G يسمى مخطط جزئي فعلي (*proper*) من المخطط G إذا كان $V(H) \neq V(G)$ أو $E(H) \neq E(G)$ ، و يسمى مخطط جزئي مـــنشأ (*spanning*) من المخطط G إذا كان $V(H) = V(G)$ أي إذا كانت له نفس مجموعة الرؤوس للمخطط G . ، [31] ، أنظر شكل (2 – 9) .



المخطط G



مخططان جزئيان من المخطط G

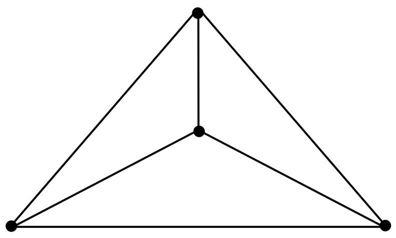
شكل (2 - 9)

(2 – 8) المخططات المرافقة **Dual graphs**

<u>تعريف (2 – 13)</u>

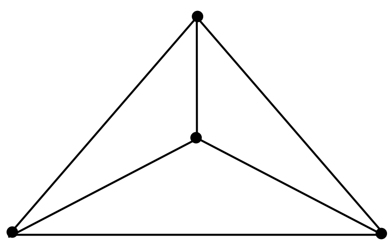
المخطط G هـــو مخطط مستوي (*planar graph*) إذا أمكن رسمه في المستوى بحيث لا يتقاطع حرفين في نقطة غير نقطة رأس في G. هذا الرسم للمخطط المستوي G يسمى تمثيل مستوي (*plane representation*) له و في هذه الحالة نقول أن المخطط G مغموس في المستوى . شكل $(2-10)$ يمثل مخططين مستويين .





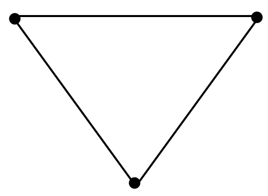
شكل (2 - 10)

المخطط المرافق (*dual graph*) $\tilde{G}$ لمخطط مستوي G معطى هو مخطط تمثل فيه كل منطقة مستوية للمخطط G برأس في $\tilde{G}$ ، ويكون $\tilde{e}$ هو حرف في $\tilde{G}$ إذا كانت المنطقتين اللتين تمثلان رأس الحرف $\tilde{e}$ متجاورتين وذلك بالنسبة لغمس معين للمخطط G . شكل (2 – 11) يمثل مخطط مستوي G (أ) و شكل (2-11) (ب) يمثل المخطط المرافق له $\tilde{G}$ ، [31] .



مخطط مستوي G

(أ)

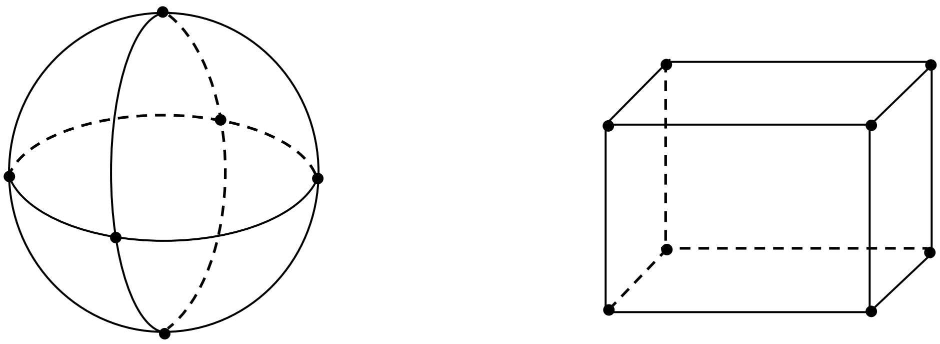


مخطط $\tilde{G}$ مرافق للمخطط G

(ب)

شكل (2 – 11)

مفهوم المخطط المرافق يمكن تعريفـــه لأي مخطط G مغموس في عديد طيات ما M من الرتبة الثانية حيث يـــقسم G عديد الطيات M إلى أوجه (مناطق) يمثل كل وجه في M رأس في المخطـــط المرافق ونصل بين رأسين في المخطط المرافق بحرف إذا كان الوجهين بينهـــما حرف مشترك في G ، شكل (2 - 12) (أ) يمثل مخطط G مغـــموس في S^2 ، و شكل (2 - 12) (ب) يمثل المخطط المرافق له $\tilde{G}$ ، [24] .



مخطط $\tilde{G}$ مرافق للمخطط G

(ب)

مخطط G مغموس في S^2

(أ)

شكل (2 - 12)

الباب الثالث

التراكيب و استعراض بعض أنواع الطي

Complexes and some kinds of folding

الباب الثالث

التراكيب و استعراض بعض أنواع الطي

Complexes and some kinds of folding

قمنا في هذا الباب بتـــعريف مـــفـــهـــوم من المفاهيم الأســـاسية في هذه الرســـالة وهو مفـــهوم التراكيب ، حيث تناولنا نوعـــين من التراكيب وهـــما التراكيب المبـــسطة و التي نحصل عليها عن طريق تركيب مجموعة من المبسطات مع بعضها البعض بشروط معينة و الـــتراكيب الخلوية التي نحصل عليها بتركيب الخلايا بدلاً من المبسطات . وفي نهاية هذا الباب عرضنا بعض أنواع الـــطي وهي الطي المتقايس و الطي المبســـط و الطي الخلوي التي تعرف على عديدات الطيات الريمانية والتراكيب المبسطة و التراكيب الخلوية على الترتيب 0

(3 – 1) التراكيب Complexes

التراكيب هي فراغات تنـــشأ عن طـــريق تـــركيب وحدات بناء معينة (مبسطات أو خلايا) مع بعضها البعض بطريقة معينة . و سوف نتناول هنا نوعين من التراكيب وهي التراكيب المبسطة ، و التراكيب الخلوية . و لتعريف التراكيب المبسطة نحتاج أولاً لتعريف المبسطات .

(3 – 1 – 1) <u>المبسطات Simplexes</u> :

المبســـط هو أصغر مجموعة محدبة (*smallest convex hull*) منشأة بواسطة الرؤوس ، و سمي المبســـط بهذا الاسم لأنه يمثل بـــأبسط عدد ممكن من الرؤوس في أي فراغ معطى ، [21] . ولإعطاء التعريف الدقيق للمبسط نحتاج في البداية إلى التعاريف التالية:

تعاريف (3 – 1) ، [15] :

(أ) يقـــال لعدد $(n+1)$ من المتجهات (أو النقاط) $v_0, v_1, ..., v_n$ في الفراغ $\Re^m$ حيث $n \geq 1$ أنـــها مستقـــلة إفـــنيًا (*affinely independent*) إذا و إذا فقط كانت مجموعة المتجهات $v_1 - v_0, ..., v_n - v_0$ مستقـــلة خطيـــاً . إذا كانت $n = 0$ فإن المتجه v_0 يكون دائمًا مستقل إفـــنـــيًا (حتى إذا كان المتجـــه الصفري) ، و هذا يعـــني وجود أعداد حقيقية غير سالبة $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ بحيث أن المعادلات

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad , \quad \sum_{i-0}^{n} \lambda_i = 1 \qquad (3-1)$$

تؤدي إلى $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. هذا التعريف يصـــف خاصية للنقاط $v_0, v_1, ..., v_n$ و لا يعـــتمد على نقطة الأصل . أيضًا هذا التعريف لا يعـــتمد على ترتيب النقاط $v_0, v_1, ..., v_n$ فمثلاً النقطتان v_0, v_1 مستقلتان خطيًا إذا كان $v_0 \neq v_1$ و النقاط v_0, v_1, v_2 مستقلة خطيًا إذا لم يكونوا على استقامة واحدة .

(ب) لتكن $v_0, v_1, ..., v_n$ متـــجهات (أو نقاط) في $\Re^m$. يقال أن المتجه v يعتمد إفنيًا على هـــذه المـــتـــجهات (*affinely dependet*) إذا وجـــدت أعـــداد حـــقيقية غير سالبة $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ بحيث أن :

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \quad , \quad \sum_{i=o}^{n} \lambda_i = 1 \qquad (3-2)$$

يجـــب مـــلاحظة أنه إذا كانت المتجهات $v_0, v_1, ..., v_n$ مستقلة إفنيًا فإن أي متجه منها لا يعتـــمد إفنيـــاً على المتجهات الأخرى ، و إذا كان المتجه v معتمد إفنًيا على المتجهات $v_0, v_1, ..., v_n$ فإن المتجهات $v_0, v_1, ..., v_n, v$ تكون غير مستقلة إفنيًا .

ملاحظة (3 – 1) :

إذا كانت المتجهات $v_0, v_1, ..., v_n$ مستقلة إفنيًا في $\Re^m$ وكان المتجه v معتمد إفنيًا عليها فإنه يمكن كتابة المتجه v بطريقة وحيدة كما يلي :

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \quad , \quad \sum_{i=o}^{n} \lambda_i = 1$$

تسمى λ_i بالإحداثيات المركزية (*barycentric coordinates*) للمتجه v .

تعريف (3 – 2) ، [15] :

لتكن المتـــجهات $v_0, v_1, ..., v_n$ مستقلة إفنيًا في $\Re^m$. المبسط (*simplex*) (المغلق) المنشأ بالرؤوس $v_0, v_1, ..., v_n$ هو مجـــموعة الـــنقاط x في $\Re^m$ التي تعتـــمد إفنيًا على هذه الرؤوس و الإحـــداثيات المركـــزية لها تكون ≥ 0 . و هذا يعـــني وجود أعداد حقيقية غير سالبة $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ بحيث أن :

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \quad , \quad \sum_{i=o}^{n} \lambda_i = 1 \qquad (3-3)$$

النقاط التي إحداثياتها المركزية > 0 تسمى نقاط داخـــلية (*interior*) للمبســـط ، و مجـــموعة النقاط الداخلية تسمى أحيانًا مبسط مفتوح (*open simplex*) منشأ بالرؤوس $v_0, v_1, ..., v_n$ ، أحـــرف المبسط تتكون من النقاط التي أحد إحداثياتها المركزية يساوي 0 ، أما رؤوس المبسط فهي النقاط التي جميع إحداثياتها المركزية تساوي 0 ما عدا إحداثي واحد فقط ، أما محيط المبسط فهو اتحاد المبسطات التي بعدها أقل من بعد المبسط نفسه .

المبســـط المنشأ بالرؤوس $v_0, v_1, ..., v_n$ يـــرمز له بالرمز $\sigma^n = (v_0 v_1 ... v_n)$ ، أو σ_n ، أو σ . أمـــا بـــعد المـــبســـط فيساوي n و يمكن التـــعبير عن ذلك بكتابته على الشكل مبسط$-n$ (*n-simplex*) . يرمز أيضًا للمبسطات بالرمز s أو t .

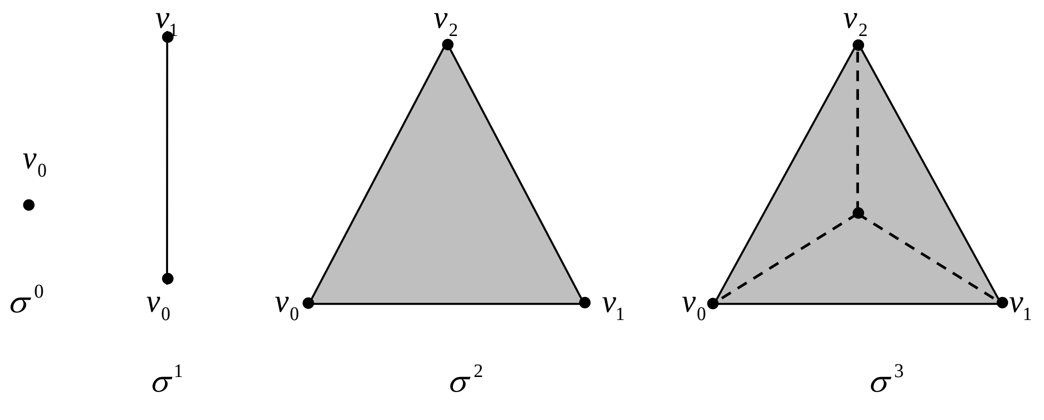
أمثلة (3 – 1) :

(أ) لأي متجه v_0 المبسط الصفري (المبسط– 0) (0-*simplex*) أو $\sigma^0 = (v_0)$ هو المجموعة $\{v_0\}$ أو النقطة ، و محيطه $= \phi$. المبسط الصفري المفتوح هو أيضًا $\{v_0\}$.

(ب) المبسط الأحادي (المبسط– 1) (1-*simplex*) أو $\sigma^1 = (v_0 v_1)$ هو القطعة المستقيمة $v_0 v_1$ التي تتكون من مجموعة النقاط $(1-\lambda)v_0 + \lambda v_1$ حيث $0 \le \lambda \le 1$ ، أما محيطه فهو المبسطين الصفريين $\{v_0, v_1\}$.

(جـ) المبسط الثنائي المبسط– 2 (2-*simplex*) أو $\sigma^2 = (v_0 v_1 v_2)$ هو المثلث الذي رؤوسه v_1, v_1, v_2 ، و محيطه يتكون من اتحاد أحرف المثلث أي أن محيطه يساوي $(v_0 v_1) \cup (v_1 v_2) \cup (v_2 v_0)$.

(د) لأي أربع متجهات غير مستوية v_0, v_1, v_2, v_3 المبسط الثلاثي المبسط– 3 (3-*simplex*) و $\sigma^3 = (v_0 v_1 v_2 v_3)$ هو الهرم المصمت الذي رؤوسه v_0, v_1, v_2, v_3 ، أما محيطه فيتكون من اتحاد أربع مبسطات ثنائية (مثلثات) ، انظر شكل (3 – 1)



شكل (3 –1)

تعريف (3 – 3) ، [15] :

ليكن $\sigma^n = (v_0 ... v_n)$ مبسط $-n$. يقال للمبسط σ^p أنه وجه للمبسط σ^n (*face of simplex*) ، حيث $p \le n$ إذا كانت رؤوسه مجموعة جزئية غير خالية من رؤوس σ^n أما إذا كانت المجموعة الجزئية فعلية فيسمى الوجه وجه فعلي . إذا كان σ^p وجه للمبسط σ^n فنكتب $\sigma^p < \sigma^n$ أو $\sigma^n > \sigma^p$. نلاحظ أن $\sigma^n < \sigma^n$ لأي مبسط σ^n . يتضح من ذلك أن محيط المبسط σ^n هو إتحاد الأوجه الفعلية له ، و عمومًا أي وجهين للمبسط σ^n أما يكونا منفصلين أو متقاطعين في وجه للمبسط σ^n .

أمثلة (3 – 2) :

(أ) أوجه المبسط -1 ، $\sigma^1 = (v_0 v_1)$ تتكون من المبسط الأحادي $(v_0 v_1)$ نفسه و المبسطين الصفريين $(v_0),(v_1)$.

(ب) أوجه المبسط -2 ، $\sigma^2 = (v_0 v_1 v_2)$ تتكون من البسط الثنائي نفسه $(v^0 v^1 v^2)$ ، و ثلاث مبسطات أحادية $(v_0 v_1),(v_1 v_2),(v_2 v_0)$ ، و ثلاث مبسطات صفرية $(v_0),(v_1),(v_2)$.

ملاحظات (3 – 2) :

(أ) المبسط $-n$ له $\binom{n+1}{p+1}$ من الأوجه من بعد p ، و بصورة عامة له $2^{n+1} - 1$ وجه من أي بعد حيث $n \ge 0$.

(ب) مجموع الأوجه الصفرية و الأحادية في أي مبسط $-n$ تكون مخطط كامل على مجموعة الرؤوس $(n+1)$ لمبسط σ^n .

فيـــما يلـــي سنصف كيف يمكننا تركيب المبسطات مع بعضها البعض لينتج لدينا ما يسمى بالتركيب المبسط .

(3 – 1 – 2) التراكيب المبسطة Simplicial complexes :

التـــركيب المبسط هو فـــراغ يتـــكون من مجموعة من المبسطات المركبة مع بعضها البعض .

تعاريف (3 – 4) ، [31] :

(أ) التركيب المبسط K هو مجموعة محدودة من المبسطات في $\Re^m$ تحقق الشروط التالية :

1- إذا كان المبسط $s \in K$ فإن كل أوجه المبسط s تنتمي للـــتركيب K ، أي إذا كان $s \in K$ و كان $t < s$ فإن $t \in K$.

2- **شرط التقاطع** : تقاطع أي مبسطين في K إما أن يكون المجموعة الخالـــة أو وجه لكل منهما ، أي إذا كان $s, t \in K$ فإن $s \cap t$ إما أن يكون المجموعة الخالية أو وجه لكـــل من s و t .

(ب) بعد التركيب المبسط K $(\dim K)$ هو أعلى بعد لجميع المبسطات في K . يرمز بالرمز $K^{(j)}$ لاتحاد جميع المبسطات التي من بعد j في التركيب K .

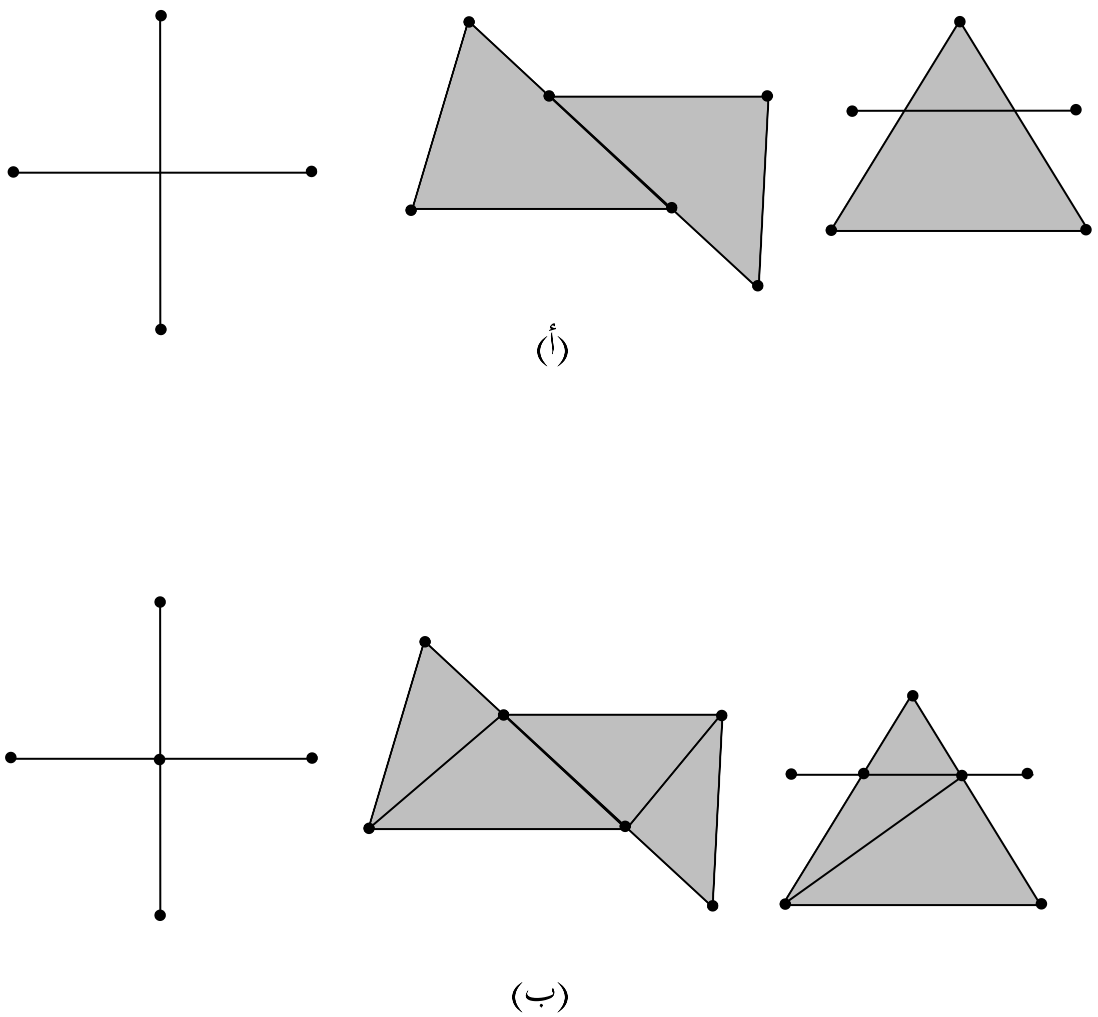
(ج) الفراغ الأساسي (*underlying space*) للتركيب المبسط K هو مجموعة النقاط في $\Re^m$ التي تنتمي إلى مبسطات K ، ويرمز له بالرمز $|K|$.

أمثلة (3 – 3)، [15] :

(أ) تجمع المبسطات الخالية يكون تركيب مبسط فراغه الأساسي خالي و ليس له بعد .

(ب) أي مخطط هو تركيب مبسط من البعد الأول .

(جـ) شكل (3 – 2) (أ) يوضح بعض الأشكال التي لا تمثل تراكيب مبســـطة ، و بإضافة مبسطات أخرى إليها ستمثل تراكيب مبسطة كما هو موضح في شكل (3 – 2) (ب) .

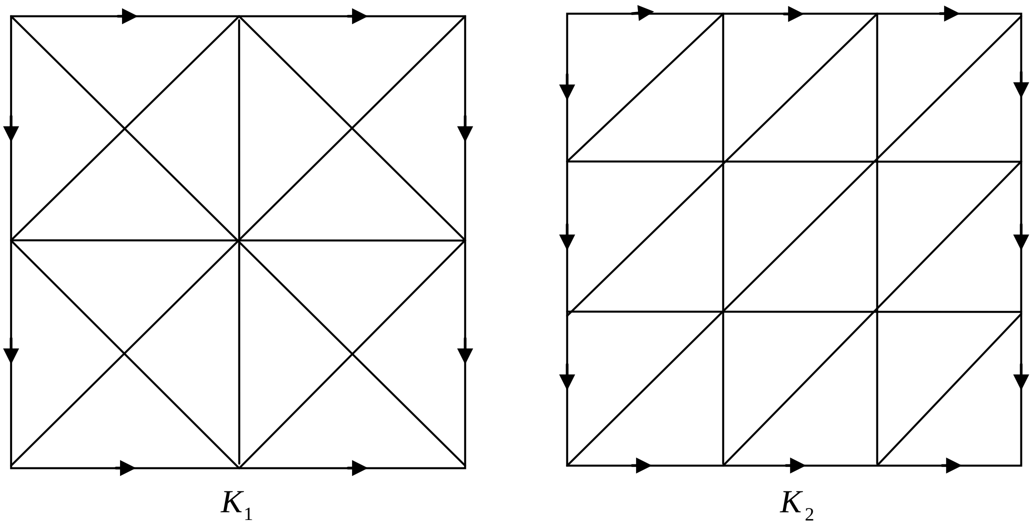


شكل (3 – 2)

(د) مجموعة كل الأوجه لأي مبسط− n σ^n هي تركيب مبسط من بعد n . أما مجموعة كل الأوجه الفعلية للمبسط σ^n فهي تركيب مبسط من بعد $n-1$.

ملاحظة (3 − 3) :

يمكنـــنا الحصول على تراكيب مبسطة مختلفة لها نفس الفراغ الأساسي ، فمثلاً شكل (3 − 3) يوضح تركيبين مبسطين K_1, K_2 في حين أن $|K_1| = |K_2| = T^2$.



شكل (3 − 3)

تعاريف (3 − 5) ، [21] :

(أ) التـــركيب المبسط الجزئي من التركيب المبسط K هو مجموعة جزئية L من K بحيث تكون هي نفسها تركيب مبسط ، أي إذا كان $\forall s \in L, t < s \Rightarrow t \in L$. يســـمى التركيب الجزئي المبسط L فعلي إذا كان $L \neq K$.

(ب) إذا كان K تركيب مبسط ، r عدد حقيقي موجب فإن الهيكل- r أو K^r هو اتحاد كل المبسطات في K من بعد أقل من أو يساوي r ، أي أن : $K^r = \{\sigma \in K : \dim \sigma \leq r\}$.

(جـ) يقال للتركيـــب المبسط أنه مترابط (*connected*) إذا وجد مسار على K^1 يصل بين أي رأسيين .

ملاحظة (3 – 4) ، [31] :

إذا كان K_1, K_2 تركـــيبان مبـــسطان جزئيـــان من التركيب المبسط K فإن كل من $K_1 \cap K_2$ و $K_1 \cup K_2$ تركيب مبسط جزئي من K ،.

(3 – 1 – 3) التراكيب الخلوية **Cell complexes**

التراكيب الخلوية هي تعـــميم للتراكيب المبسطة حيث تستبدل المبسطات في التركيب المبسط بما يعرف بالخـــلايا (*cells*) و بذلك نحصل على التركيب الخلوي . و تعرف الخلايا كما يلي :

تعريف (3 – 6) ، [19] :

الخـــلية من الـــبعد n (الخلية- n) ($n-cell$) و التي يرمز لها بالرمز e^n هي فراغ توبولوجي داخلها متشاكل شكليًا مع القرص النـــوني $D^n = \{x \in \Re^n : \|x\| < 1\}$ بحيث يكون محيط الخلية مقسم إلى عدد محدود من خلايا ذات بعد أقل ، و تسمى هذه الخـــلايا (على المحيط) أوجه الخلية ، فإذا كان t وجه للخلية e فإننا نكتب $t < e$ أو $e > t$.

أمثلة (3 – 4) :

(أ) الخلية الصفرية (الخلية– 0) (0-*cell*) e^0 هي النقطة ، و محيطها $= \phi$.

(ب) الخلية الأحادية (الخلية–1) (1-*cell*) e^1 متشـــاكلة شكليًا مع القطعة المستقيمة ، و محيطها مكون من خليتين صفريتين .

(ج) الخلية الثنائية (الخلية– 2) (2-*cell*) e^2 متشاكلة شكليًا مع قرص مفتوح ، و محيطها يتكون من خلايا صفرية و أحادية .

(د) الخلية الثلاثية (الخلية–3) (3-cell) e^3 متشاكلة شكليًا مع مجسم عديد الأوجه مصمت (*solid polyhedron*) ، ومحيطها يتكون من خلايا صفرية و أحادية و ثنائية .

تعر يف (3 – 7) ، [19] :

التركيب الخلوي K هو فراغ ناتج عن الاتحاد المنفصل لمجموعة محدودة من الخلايا في $\Re^m$ أي أن $K = \bigcup\{e : e \quad is \quad a \quad cell\}$ بحيث يحقق الشروط التالية :

1– إذا كانت e خلية في التركيب K ، فإن كل أوجه الخلية e تنتمي للتركيب K .

2– **شرط التقاطع** : تقـــاطع داخلية أي خليتين في K يـــكون المجموعة الخالية ، أي إذا كان $e,t \in K$ فإن $Int(e) \bigcap Int(t) = \phi$.

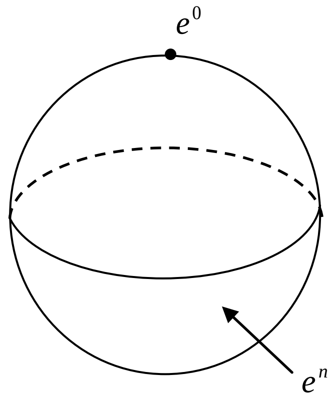
أما بعد التركيب الخلوي K $(\dim K)$ فهو أعلى بعد لجميع الخلايا في K .

يمكننا القول بأن التركيب الخلوي هو فراغ توبولوجي تمت تغطيته بواسطة خلايا من أبعاد مختلـــفة على أن يحتوي على خلية صفرية واحدة على الأقل ، كما يمكنـــنا اعتبار أن كل فراغ هاوس دورف هو تركيب خلوي تمثل فيه كل نقطة خلية صفرية ، [28] .

أمثلة (3 − 5) :

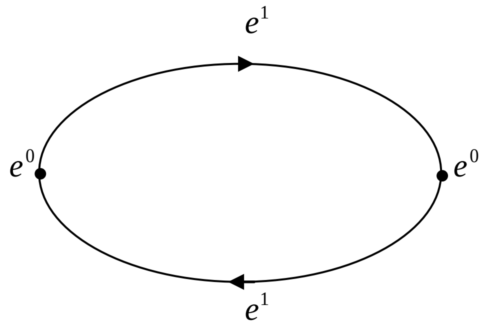
(أ) الكرة S^n شكل (3 − 4) تمثل تركيب خلوي مكون من خليتين e^0,e^n حيث :

$$e^0 = \{(1,0,\ldots,0)\} \quad , \quad e^n = S^n \setminus e^0 = S^n - e^0$$



شكل (3 - 4)

(ب) المستوى الإسقاطي RP^n يمثل تركيب خلوي مكون من خلية واحده من بعد k لكل $k \le n$ ، انظر شكل (3 − 5) .



شكل (3 - 5)

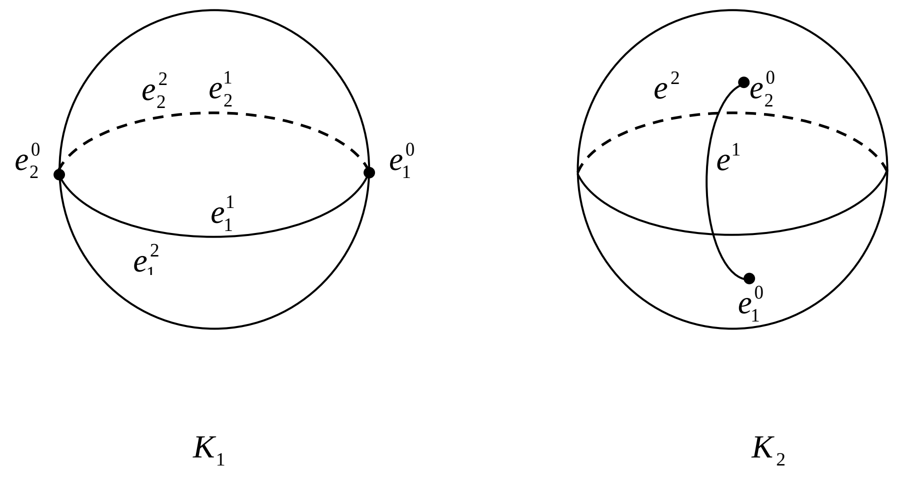
(جـ) مجموعة كل الأوجه لأي خلية– n e^n هي تركيب خلوي من بعد n .

تعريف (3 − 8) ، [31] :

ليكن K تركيـــب خلوي ، مجموعة النقاط التي تنتمي إلى خلايا التركيب K و التي يرمز لهـــا بالرمز $|K| = \{x : x \in e \in K \quad , \quad e \quad acell \quad in \quad K\}$ تسمى الفراغ الأساسي للتركيب الخلوي K .

ملاحظة (3 − 5) :

الفرق بين الفراغ الأساسي و التركيب الخلوي أن التركيب الخلوي K هو اتحاد مجموعة من الخلايا في حين أن الفراغ الأساسي $|K|$ هو مجموعة من النقاط . كما أنه يمكن الحصول على تراكيب خلوية مختـــلفة لهـــا نفـــس الفراغ الأساسي ، فمثلاً شكل (3 − 6) يوضح تركيبين خلويين K_1, K_2 في حين أن $|K_1| = |K_2| = S^2$.

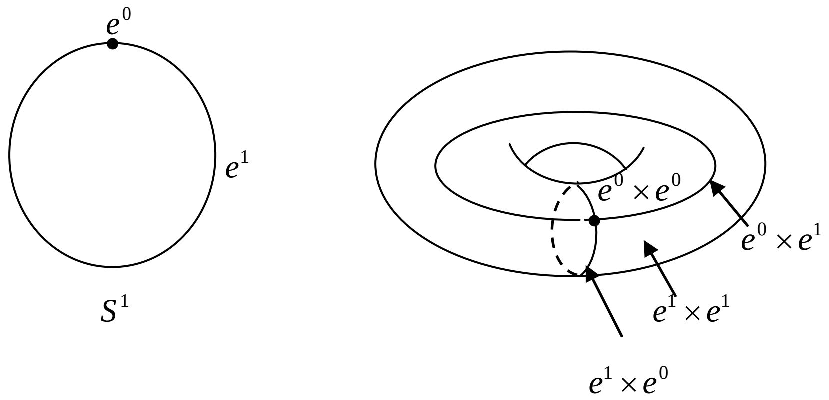


شكل (3 − 6)

من أهم خواص التراكيب الخلوية أنه إذا كان K,L تركيبين خلويين من البعدين k,l على الـــترتيـــب فـــإن $K\times L$ يـــكون تركيب خلوي يســـمى بالتركيب الخلوي الضربي (*product cell complex*) فيه الخلايا معرفة كالتالي :

$$e^n = e^i \times e^j \quad , \quad e^i \in K \quad , \quad e^j \in L \quad , \quad i+j=n$$

فمثلاً السطح الكعكي T^2 يمكن تعريفه كتركيب خلوي ضربي $S^1\times S^1$ حيث S^1 تركيب خلوي مكون من خلية صفـــرية e^0 و خلية أحادية e^1 ، في هذه الحالة T^2 سيمثل تركيب خلوي مكون من خلية صفرية $e^0\times e^0$ ، وخليتين أحاديتين $e^0\times e^1, e^1\times e^0$ ، و خلية ثنائية $e^1\times e^1$ ، أنظر شكل (3 – 7) .



شكل (3 – 7)

(3 – 2) بعض أنواع الطي Some kinds of folding

مفهوم الطي من المفاهيم الحديثة في علم الهندسة . و للطي أنواع متعددة تم التوسع في دراستها و من هذه الأنواع ما يلي :

(3 – 2 – 1) الطي المتقايس **Isometric folding**:

لقــد بدأ Robertson 1977 دراسة الطي ، و كان أول أنواع الطي هو الطي المتقايس (*isometric folding*) لعديدات الطيات الريمانية ، و ينتج مفهوم الطي من الفكرة البسيطة التالية : لنفرض أنـــنا قمنا بتجعيد صفحة من الورق ثم أعدنا فردها مرةً أخرى على سطح طاولة فنـــجد أن الورقة أصبحت مسطـــرة بثنيات متقاطعة لا تختفي حتى إذا قمنا بتمليس الورقة بواسطة اليد . من الوهـــلة الأولى قد تبدو هذه الخطوط عشوائية وغير منتظمة ولكن بعد التدقيق فيها سنلاحظ ما يلي :

أولاً: كل الثنيات تتكون من قطع مستقيمة .

ثانيًا: إذا كانـــت النقطة p نقطة نـــهاية لقطعة مستقيمة فإن العدد الكلي للقطع المستقيمة المتصـــلة بالـــنقطة p (طيات الدالة) يكـــون عدد زوجي (غالبًا ما يكون العدد أكبر من أو يساوي أربعة) .

ثالثًا: مجموع الزوايا المتناوبة بين الطيات عند النقطة p يساوي π .

ويمكن تمثيل ذلك رياضيًا كما يلي : نقوم باستبدال صفحة الورقة و سطح الطاولة بالمستوى الإقليدي $\Re^2$ الـــمعرف عليه المتري الريماني ، و استـــبدال عمليتي التجعيد و الفرد براسم $f:\Re^2 \to \Re^2$ الذي يرســـل كل القطع المستقيمة في $\Re^2$ إلى أخرى في $\Re^2$ لـــها نفس الطول.

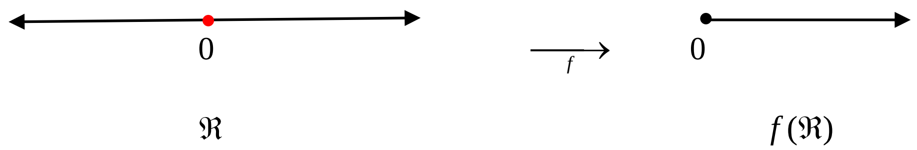
بصـــورة عامة ، إذا كان M, N عديدي طيات ريمانيان أملسان من بعدي m,n على الـــترتيب حيث $m \le n$ ، فإن الراسم $f: M \to N$ يسمى طي متقايس لعديد الطيات M على عديد الطيات N إذا وإذا فقـــط كانـــت صورة كل مـــســـار جيوديسي متقطـــع $\gamma: I \to M$ في M هو مســـار جيوديسي متقطع $\delta = f \circ \gamma: I \to N$ في N و من نفـــس الطول ، [23] .

مجموعة النقاط في M و التي تكون عندها الدالة f غير قابلة للتفاضل تسمى مجموعة النقاط المنفردة (الشاذة) (*set of singularities*) ويرمـــز لها بالرمز $\sum f$ و هي تنـــاظر طيات الدالة . يــــرمز لمجموعة الطيات المتقايسة من عديد الطيات M إلى عديد الطيات N بالرمز $\mathscr{F}(M,N)$ و من عديد الطيات M إلى نفسه بالرمز $\mathscr{F}(M)$.

من تعريـــف دالة الطي المتقايس لم يشترط أن تكون دالة الطي متصلة أو قابلة للتفاضل و لكن على أية حال الاتصال ينتج مباشرة من التعريف و ذلك لأنه إذا فرضنا أن d_M, d_N هما المتري المستـــحث على M, N على الترتيب بواسطة بنيتهم الريمانية فإن لكل $x, y \in M$ نجد أن ، [23] : $d_N(f(x), f(y)) \le d_M(x,y)$

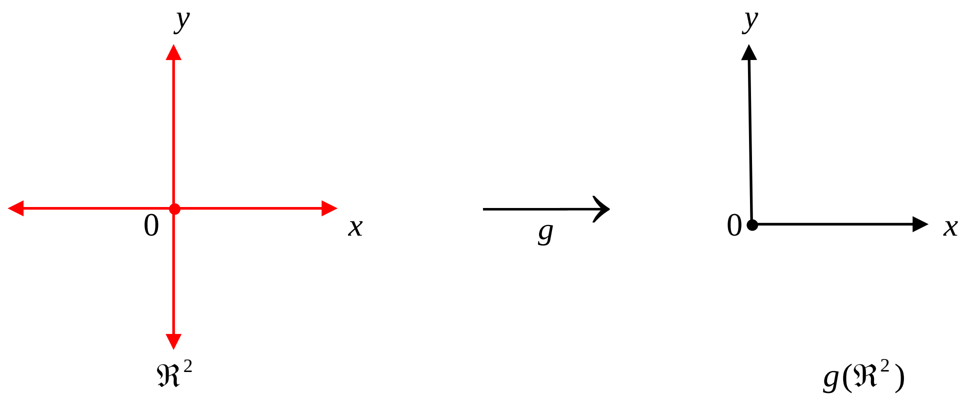
أمثلة (3 – 6) :

(أ) إذا كان $M = N = \Re$ ، حيـــث $\Re$ هو خـــط الأعـــداد الحقيقي المزود بالبنية الريمانية القيـــاسية وكانت الدالة $f : \Re \to \Re$ معرفة كـــما يلي : $f(t) = |t|$ فإن الدالة f تطوي خط الأعداد $\Re$ على نفسه طيًا متقايسًا كما هو موضح بالشكل (3 – 8) ، هنا $\sum f = \{0\}$.



شكل (3 – 8)

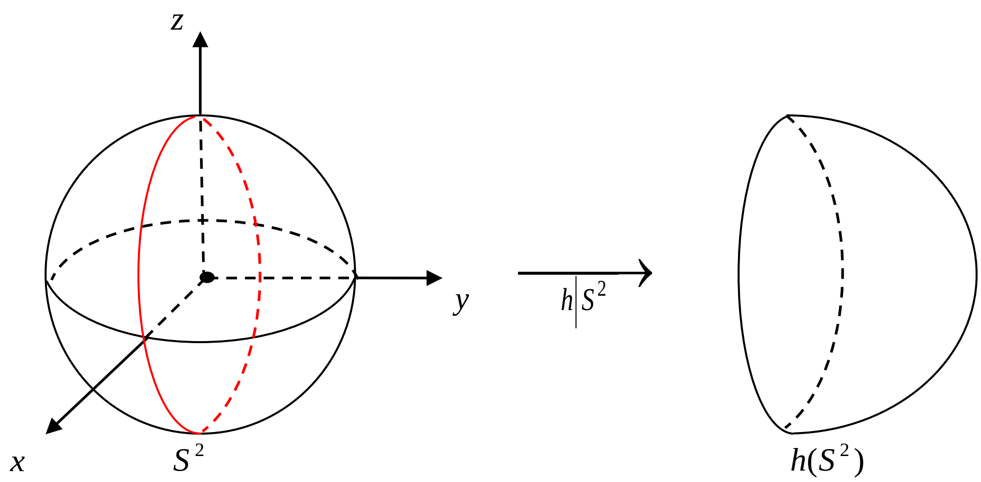
(ب) إذا كان $M = N = \Re^2$ ، حــيث $\Re^2$ مزود بالبنية الريمانية المنبسطة القياسية و كانت الدالة $g : \Re^2 \to \Re^2$ معرفة كما يلي : $g(x,y) = (|x|,|y|)$ ، فإن الدالة g تطوي المستوى على نفسه طيًا متقايسًا و الصورة هي الربع الموجب كما هو موضح بالشكل (3 – 9) .



شكل (3 - 9)

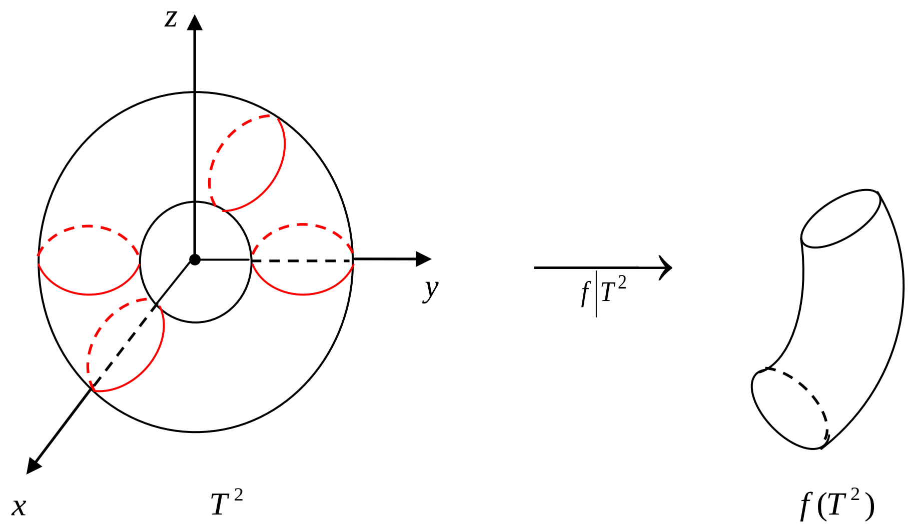
ومجموعة النقاط المنفردة في هذه الحالة هي اتحاد محوري الإحداثيات .

(جـ) إذا كان $M = N = \Re^3$ ، حيث $\Re^3$ مزود بالبنية الريمانية المنبسطة القياسية و $S^2 = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ هي كرة الوحدة في $\Re^3$ و الدالة $h : \Re^3 \to \Re^3$ معرفة كما يلي : $h(x, y, z) = (x, |y|, z)$ فإن الدالة $h|S^2$ هي دالة طي متقايس للكرة على نفسها ، $\sum h|S^2$ هي الدائرة العظمى $x^2 + z^2 = 1, y = 0$ ، أنظر شكل (3 - 10) .



شكل (3 - 10)

(د) إذا كـــان $M = T^2 = \{(x,y,z) \in \Re^2 : (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - 2)^2 + z^2 = 1\}$ و كـــانت الـــدالة $f : \Re^3 \to \Re^3$ معــــرفــــة بالعلاقة $f(x,y,z) = (|x|,|y|,z)$ ، فإن الدالة $f|T^2$ هي دالة طي متقايس ، $\sum f|T^2$ هي اتحاد أربع دوائر ناتجة عن تقاطع المستويين $x=0, y=0$ مع السطح T^2 ، أنظر شكل $(3-11)$.



شكل $(3-11)$

لاحــــظ أن مجموعة النقاط المنفردة ليس من الضروري أن تكون مترابطة ، و يمكن أن يكون لها مركبات متشاكلة شكليًا مع دوائر لا تحتوي على رؤوس كما هو موضح في المثال السابق .

البنية المحلية لمجموعة النقاط المنفردة $\sum f$ لدالة طي متقايس f تم توضيحها بالتفصيل بواســــطة Robertson و الــــتي يمكن بالاعتماد عليها بناء صورة عامة عن $\sum f$ لأي طي متقايس من M إلى N حيث M,N عديدي طيات ريمانيان ، في الــــبداية مجموعة النقاط المنفردة $\sum f$ تقسم M إلى عديدات طيات جزئية مترابطة و منفصلة تبادليًا تسمى طبقات *(stratum)* و تحقق الخواص التالية ، [23] :

1-إذا كان $\sum_k f$ هو اتحاد جميع الطبقات من بعد k فإن :

$$\sum f = \bigcup_{k=0}^{m-1} \sum_k f$$

2-لكل طبقة S ، $f|S$ هي غمس متقايس محلي في N .

3-محـــيط كـــل طبقة هو اتحاد طبـــقات من بعد أقل و في حالة ما يكون M متراص فإن الطبقات يكون عددها محدود .

4-محيط المجموعة $\sum_k f$ في M هو اتحاد كل المجموعات $\sum_l f$ حيث $0 \le l \le k-1$.

أما في حالة السطوح فقد تم توضيح البنية المحلية و بالتالي مجموعة النقاط المنفردة على يد El-Kholy 1981 ، و هي كالتالي : إذا كانت $f \in \mathscr{F}(M,N)$ حيث M,N عديدي طيات ريمانيان أملسان من البعد الثاني فإن مجموعة النقاط المنفردة $\sum f$ تمثل مخطط على M بحيـــث تـــكون رتبة كل رأس في هذا المخطط زوجية ، هذا المخطط لا يحتوي على لفات أو أحرف مزدوجة (مخطط بسيط) ، [5] .

(3 – 2 – 2) الطي المبسط **Simplicial folding** :

لقد تمت دراسة الطي المتقايس باستفاضة بواسطة Robertson لتشمل جوانب عديدة و بـــالإضافة لذلك تم تقديم مفهوم الطي التوبولوجي (*topological folding*) بواسطة كلاً من El-Kholy & Robertson وذلـــك بتطوير مفهوم الطي المتقايس في غياب البناء المتقايس . الـــطي التـــوبـــولـــوجي و هو أحد أنواع الطي الذي لا يحافظ على الأطوال أو المساحات أو الأحجام ... الخ . و مجموعة النقاط المنفردة $\sum f$ في الطي التوبولوجي تمثل مجـــموعة النـــقاط الـــتي تكون دالة الطي عندها غير متشاكلة محليًا مع صورها . و للطي الـــتوبـــولـــوجي أنواع كثيرة و أحد أنواعه هو الطي المبسط (*simplicial folding*) على التراكيب المبسطة (*simplicial complexes*) الذي نحن بصدد دراسته في هذه الرسالة ، و قد تم تقديمه على يد كلاً من El-Kholy & El-Ghoul .

تعريف (3 – 9) ، [6] :

ليكن K,L تركيبان مبسطان ، يقال أن الدالة $f:K\to L$ دالة مبسطة إذا كان :

1- لكل $\sigma\in K$ فإن $f(\sigma)\in L$.

2- $\dim(f(\sigma))\le\dim(\sigma)$.

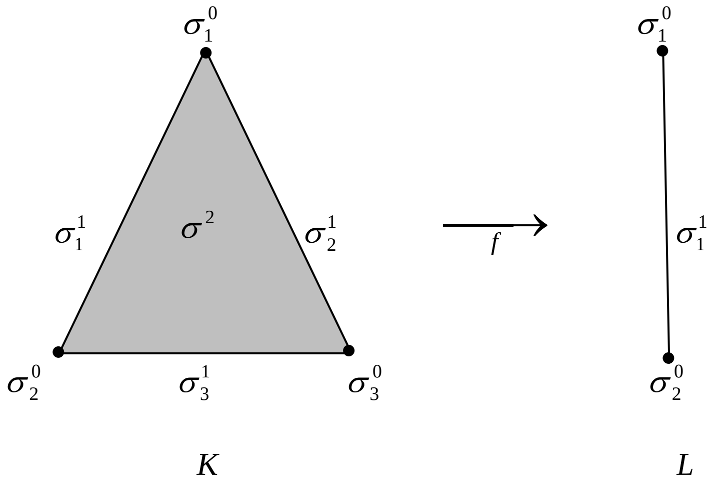
أي أن الدالة المبسطة f ترسل مبسطات في K إلى مبسطات أخرى في L .

أمثلة (3 – 7) :

(أ) لأي تركيب مبسط K ، دالة الوحدة $f:K\to K$ هي دالة مبسطة لأنها ترسل التركيب المبسط K إلى نفسه .

(ب) ليكـــن K تركيب مبسط من البعد الثاني موضح بالشكل (3 – 12) ، هذا التركيب مكون من ثلاث مبـــسطات صفرية ، و ثلاث مبـــسطات أحادية ، و مبسط ثنائي واحد و لتكن الدالة $f:K\to L$ معرفة كما يلي :

$$f\{\sigma_1^0,\sigma_2^0,\sigma_3^0\}=\{\sigma_1^0,\sigma_2^0,\sigma_2^0\}$$
$$f\{\sigma_1^1,\sigma_2^1,\sigma_3^1\}=\{\sigma_1^1,\sigma_1^1,\sigma_2^0\}$$
$$f\{\sigma^2\}=\{\sigma_1^1\}$$



شكل (3 – 12)

هذه الــدالة دالة مــبسطة صورها L تركيب مبسط من البعد الأول يتكون من مبسطين صفريين و مبسط أحادي واحد.

يــجب مــلاحظة أن الــدالة المبسطة تعرف تعريفًا كاملاً بتعريف صور الرؤوس فقط ، و لذلك يمكن كتابتها كما يلي : $f: K^{(0)} \to L^{(0)}$.

تعريف (3 – 10) ، [6] :

يــقال لــلدالة المبسطة $f: K^{(0)} \to L^{(0)}$ من تركيب مبسط K بعده k إلى تركيب مبسط L بعده l حيث $k \le l$ أنها دالة طي مبسط إذا كانت صورة كل مبسط $\sigma \in K^{(i)}$ هــي مــبسط $f(\sigma) \in L^{(i)}$. أي أن الــدالة المبسطة f ترسل مبسطات في K من بعد $i = 0,1,...,m$ إلى مبسطات أخرى في L ولكن من نفس البعد .

يرمز لمجــموعة الطيات المبســطة من K إلى L بالرمز $\mathscr{S}(K,L)$ ، و من K إلى نفسه بالرمز $\mathscr{S}(K)$. إذا كان $f \in \mathscr{S}(K,L)$ ،كما سبق ذكره فإن $p \in K$ تسمى نقطة منفردة للــدالة f إذا و إذا فقط كانت الدالة f غير متشاكلة محليًا عنــد النقطة p مع صورها . و يرمز لمجموعة النقاط المنفردة بالرمز $\sum f$ ، هذه المجــموعة تقابل طــيات الدالة و هي مجموعة جزئية فعلية من اتحاد كل المبسطات من بعد أقل من أو يساوي $k-1$ ، حيث k هو بعد التركيب المبسط K ، و عليه فإنه لأي طي مبسط لتركيب مبسط من البعد الثاني فإن $\sum f$ تتكون من مبسطات صفرية و مبسطات أحادية .

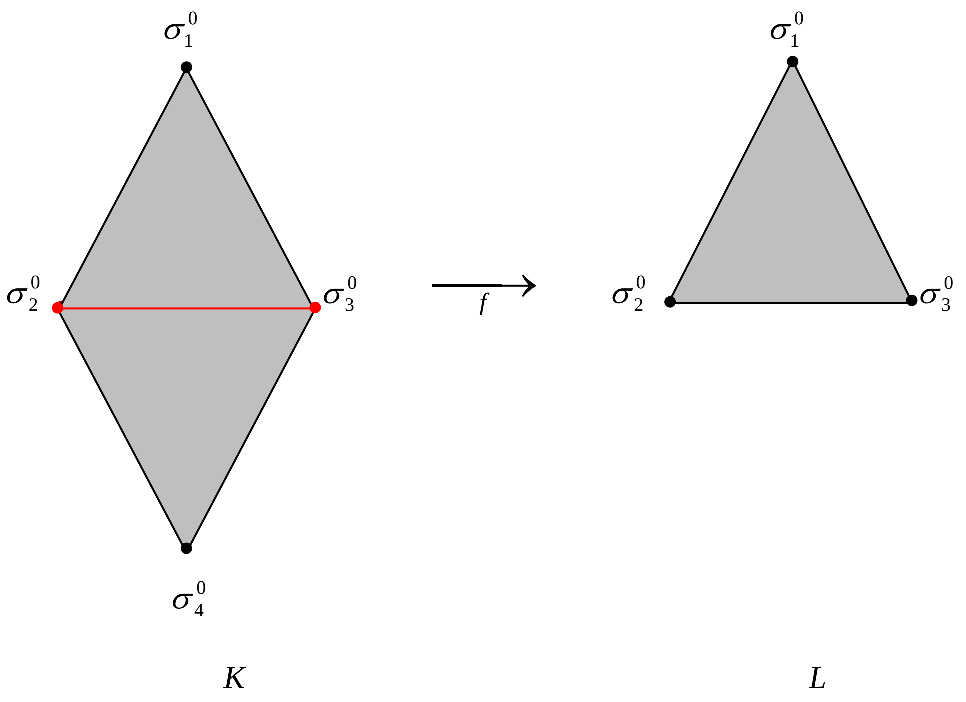
أمثلة (3 – 8) :

(أ) لأي تركيب مبسط K ، دالة الوحدة $f:K\rightarrow K$ هي طي مبسط ، و مجموعة النقاط المنفردة هي المجموعة خالية .

(ب) ليــكن K تركيب مبسط من البعد الثاني موضح بالشكل (3 – 13) . هذا التركيب يتــكون من أربــعـــة مبسطات صفرية ، و خمسة مبسطات أحادية ، و مبسطين ثنائيين .

و لتكن الدالة $f:K^{(0)}\rightarrow L^{(0)}$ دالة مبسطة معرفة كما يلي :

$$f\{\sigma_1^0,\sigma_2^0,\sigma_3^0,\sigma_4^0\}=\{\sigma_1^0,\sigma_2^0,\sigma_3^0,\sigma_1^0\}$$



شكل (3 – 13)

هذه الدالة تمثل طي مبسط صورتها L تركيـــب مبسط مكون من ثلاث مبسطات صفرية و ثلاث مبـــسطات أحادية و مبسط ثنائي واحد كمـــا هو موضـــح بـــالشكل السابق ، و المجموعة $f\sum$ هي المبسط الأحادي $(\sigma_2^0\sigma_3^0)$.

(3 – 2 – 3) الطي الخلوي Cellular folding :

تم تقديم الطي الخلوي (*cellular folding*) على يد كلاً من El-Kholy & Shahin حيث يتم في هذا الطي إرسال خلايا (*cells*) إلى أخرى من نفس البعد بحيث يتضمن محتوى كل خلية وصورها نفس العدد من الخلايا الصفرية.

ليكن K,L تركيبان خلويان من بعد k,l على الترتيب بحيث أن $k \le l$ ، و ليكن التركيب K مقسم خلويًا إلى عدد محدود من الخلايا بحيث أن كل خلية مغلقة من بعد i تكون متشاكلة شكليًا مع خلية مغلقة في الفراغ الإقليدي من بعد i حيث $i > 0$.

تعريف(3 – 11) ، [19] :

الدالة $f : K \to L$ من التركيب الخلوي K إلى التركيب الخلوي L بحيث أن $f : |K| \to |L|$ دالة متصلة تسمى دالة خلوية إذا كان:

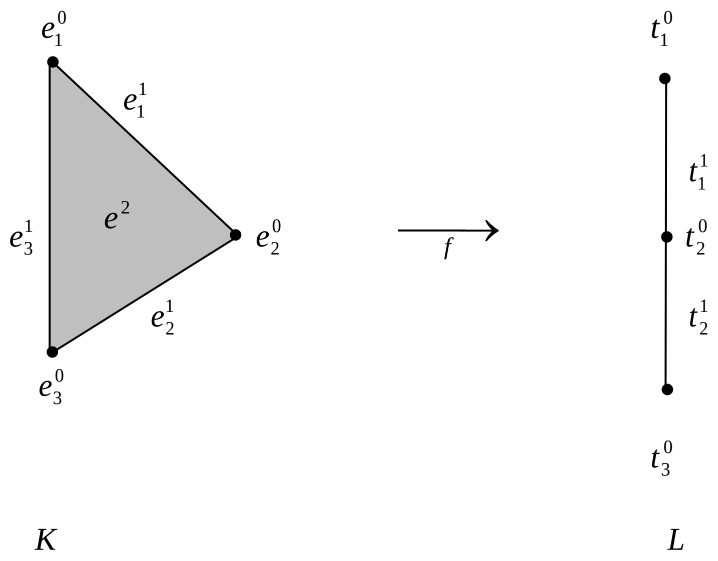
1- لكل خلية $e \in K$ ، فإن $f(e)$ هي خلية في L .

2- $\dim(f(e)) \le \dim(e)$.

أمثلة (3 – 9) :

(أ) إذا كانت الدالة $f : K \to L$ حيث K,L التركيبان الخلويان الموضحان في الشكل (3 – 14) ، معرفة كالتالي :

$$f(e_1^0) = t_1^0 \quad , \quad f(e_2^0) = t_2^0 \quad , \quad f(e_3^0) = t_3^0 \quad ,$$
$$f(e_1^1) = t_1^1 \quad , \quad f(e_2^1) = t_2^1 \quad , \quad f(e_3^1) = t_1^1 + t_2^1 \quad ,$$
$$f(e^2) = t_2^1 + t_2^1$$



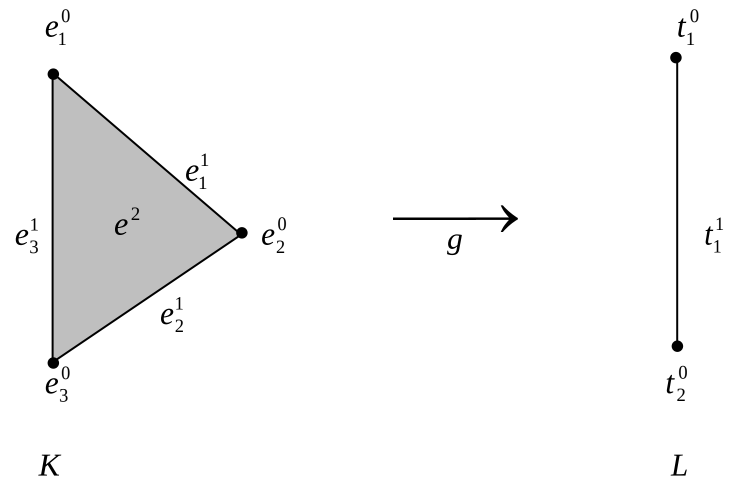
شكل $(3-14)$

هذه الدالة لا تمثل دالة خلوية و ذلك لأن صورة الخلية e_3^1 هي اتحاد خليتين .

(ب) نفرض أن K,L تركيبان خلويان من البعد الثاني و الأول على الترتيب و الموضحان في الشكل $(3-15)$ ، الدالة $g:K\to L$ المعرفة كالتالي :

$$g(e_1^0)=t_1^0 \quad , \quad g(e_2^0)=g(e_3^0)=t_2^0 \quad ,$$
$$g(e_1^1)=g(e_3^1)=t_1^1 \quad , \quad g(e_2^1)=t_2^0 \quad ,$$
$$g(e^2)=t_1^1$$

هي دالة خلوية .



شكل (3 − 15)

ملاحظات (3 − 6) :

(أ) يوجـــد طريقتين للتعامل مع الدوال المتصلة التي لا تمثل دالة خلوية حتى نحولها إلى دوال خلوية :

1- تعديل بنية التراكيب الخلوية .

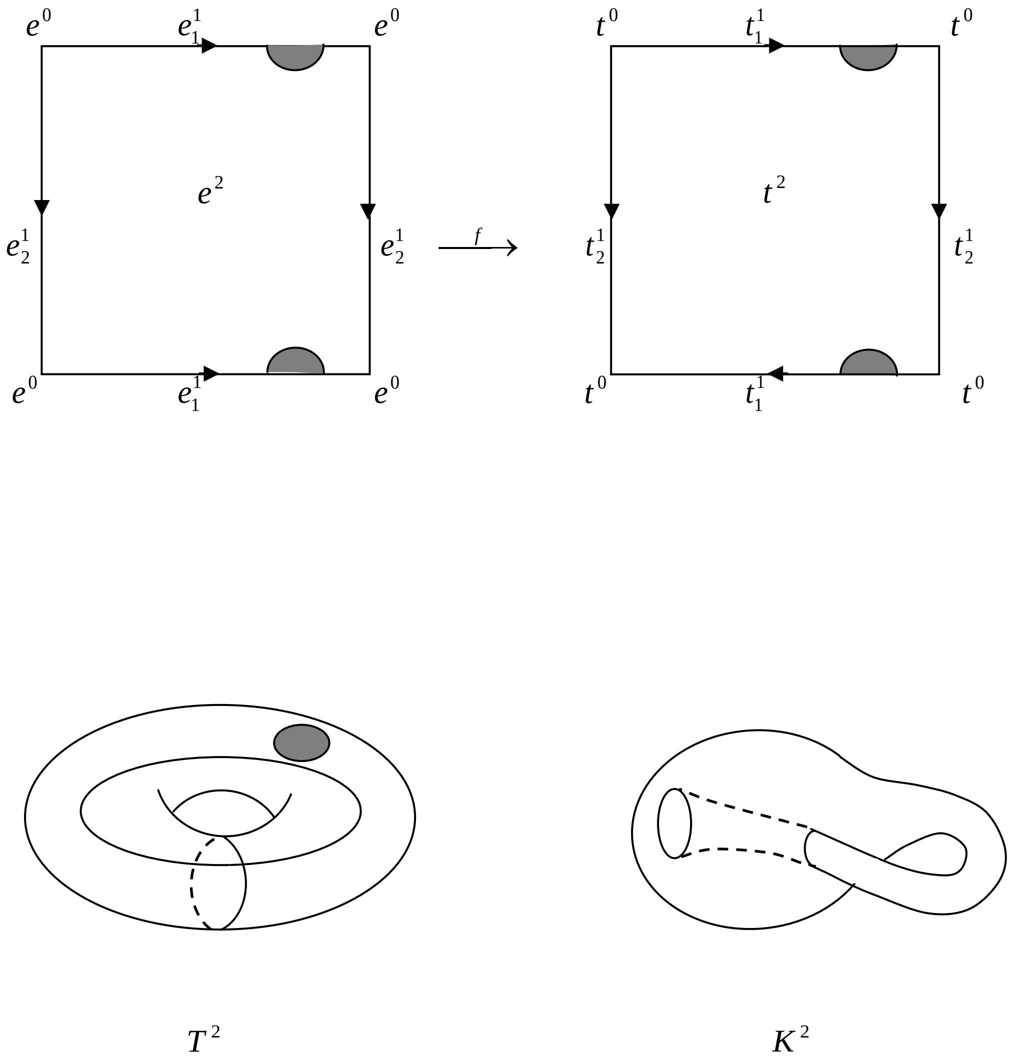
2- تعديل الدالة نفسها .

(ب) هناك دوال لا تحافظ على البناء الخلوي للتركيب و لكنها ليست متصلة على الفراغات التوبولوجية التحتية كما هو موضح في المثال التالي

مثال (3 − 10) ، [19] :

إذا كانـــت $f:|T^2|\to|K^2|$ دالـــة معرفة على خلايا كـــل من السطح الكعكي T^2 وقارورة كلاين K^2 الموضحتان في الشكل (3 − 16) كما يلي :

$f(e^0)=t^0 \quad , \quad f(e_1^1)=t_1^1 \quad , \quad f(e_2^1)=t_2^1 \quad , \quad f(e^2)=t^2$



شكل $(3-16)$

الــــدالة f تحقق شرطي الدالة الخلوية على الرغم من أنها ليست متصلة كما تبدو من صور الجـــوارات المــــبينة في الشكل $(3-16)$ لأن أنصاف الأقراص في T^2 تلتصق مع بعضها لتشكل قرص مترابط بينما صورة أنصاف الأقراص هذه في K^2 غير مترابطة و هذا يناقض خواص الدالة المتصلة .

تعريف ($3-12$) ، [9] :

الـــدالة الخلوية $f:K\rightarrow L$ تســـمى دالـــة طي خلوي إذا و إذا فقط تحقق الشرطين التاليين:

1- لـــكل خلية $e^i \in K$ ، فإن $f(e^i)$ هي خلية من نفـــس البعد في L . أي أن f ترسل خلايا من بعد i إلى أخرى من نفس البعد .

2- إذا احتوى التغليق $\bar{e}$ للخلية e على n من الـــرؤوس المخـــتلفة ، فإن التغليق $\overline{f(e)}$ يجب أن يحتوي على n من الرؤوس المختلفة. أي أن $f|\bar{e}$ هو تشاكل شكلي على صورته .

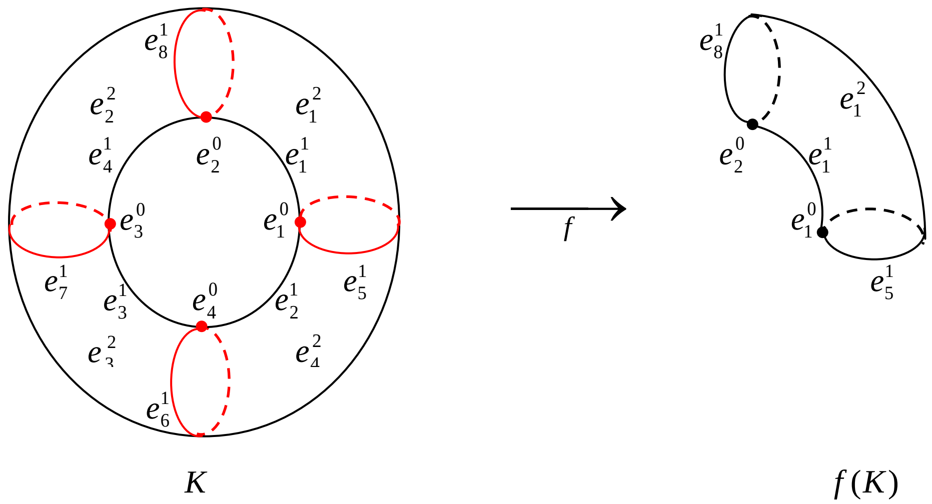
مجموعة كل الطيات الخلوية الممكنة من K إلى L يرمز لها بالرمز $\mathscr{C}(K,L)$. إذا كان $f \in \mathscr{C}(K,L)$ ، فإن $p \in K$ تسمى نقطة منفردة للدالة f إذا و إذا فقط كانت الدالة f غير متشاكلة محليًا عنـــد النقطـــة p مع صورتها . و مجموعة النقاط المنفردة للدالة يرمز لها أيضًا بالرمز $\sum f$ ، و هي تقابل طـــيات الدالة كما أنها مجموعة جزئية فعلية من اتحاد كل الخلايا من بعد أقل من أو يساوي $k-1$ ، حيث k هو بعد التركيب الخلوي K . بناءً على ذلك فإن $\sum f$ لأي طي خلوي للتراكيب الخلوية من البعد الثاني تتكون من خلايا صفرية و خلايا أحادية فقط ، أي أن $\sum f$ يكون مخطط هذا المخطط رتبة كل رأس فيه زوجية كما أن $\sum f$ ليس من الضروري أن يكون مترابط ، [9] .

أمثلة ($3-11$) ، [9]:

(أ) لأي تركيـــب خلوي K ، راسم الوحدة يمثل طي خلوي ، و مجموعة النقاط المنفردة في هذه الحالة هي المجموعة الخالية .

(ب) نعتـــبر التركيب الخلوي K بحيث أن $|K| = T^2$ المكون من أربع خلايا صفرية و ثمانية خلايا أحادية و أربع خلايا ثنائية . لتكن الدالة $f:K\rightarrow K$ دالة خلوية معرفة كما يلي:

$$f(e_1^0,e_2^0,e_3^0,e_4^0)=(e_1^0,e_2^0,e_1^0,e_2^0)$$
$$f(e_1^1,e_2^1,...,e_8^1)=(e_1^1,e_1^1,e_1^1,e_1^1,e_5^1,e_8^1,e_5^1,e_8^1)$$
$$f(e_i^2)=e_1^2 \quad , \quad i=1,2,3,4$$

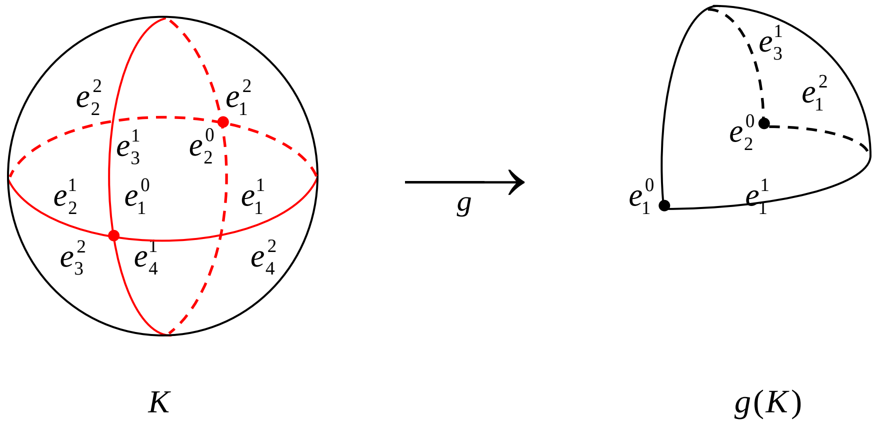


شكل (3 – 17)

هذه الـــدالة تمثل دالة طي خلوي صورتها $f(K)$ هي تركيب خلوي مكون من خليتين صفريتين و ثلاث خلايا أحادية وخلية ثنائية واحدة ، نلاحظ أن $|f(K)|$ مـــتشاكل شكليًا مع الأسطوانة . $\sum f$ هي المخطط الملون في الشكل (3 – 17) .

(جـ) نعتبر التركيب الخلوي K بحيث أن $|K|=S^2$ المكون من خلـــيتين صفريتين و أربـــع خلايا أحادية و أربع خلايا ثنائية . لتكن الدالة $g:K\to K$ دالة خلوية معرفة كما يلي:

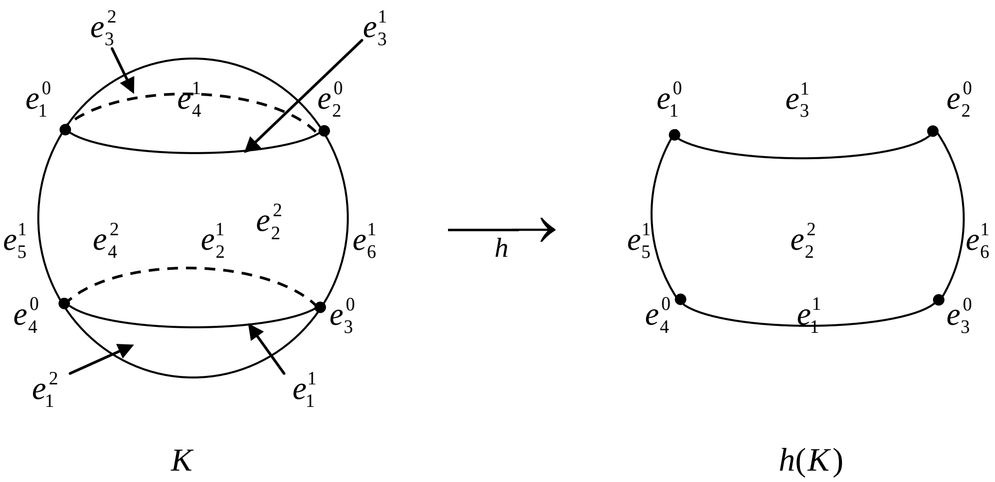
$$g(e_1^0,e_2^0)=(e_1^0,e_2^0,)$$
$$g(e_1^1,e_2^1,e_3^1,e_4^1)=(e_1^1,e_1^1,e_3^1,e_3^1)$$
$$g(e_i^2)=e_1^2 \quad , \quad i=1,2,3,4$$



شكل (3 - 18)

هذه الـــدالة تمثل دالة طي خلوي صورتها $g(K)$ هي تركيب خلوي مكون من خليتين صفريتين و خليتين أحاديتين و خلية ثنائية واحدة . نلاحظ أن $|g(K)|$ متشاكل شكليًا مع قرص له رأسين على محيطه . $\sum g$ هي المخطط الملون في الشكل (3 - 18) .

(د) إذا كان K تركيب خلوي بحيث أن $|K| = S^2$ مكون من أربع خلايا صفرية ، و ست خلايا أحادية ، و أربع خلايا ثنائية ، أنظر شكل (3 – 19) .



شكل (3– 19)

ولتكن الدالة $h: K \to K$ دالة خلوية معرفة كما يلي :

$$h(e_i^0) = e_i^0 \quad , \quad i = 1,2,3,4$$
$$h(e_1^1, \ldots, e_6^1) = (e_1^1, e_1^1, e_3^1, e_3^1, e_5^1, e_6^1)$$
$$h(e_j^2) = e_2^2 \quad , \quad j = 1,2,3,4$$

الدالة h ليست طي خلوي و ذلك لأن على سبيل المثال تغليق e_1^2 $(\overline{e_1^2})$ وتغليق صورتها $\overline{f(e_1^2)}$ لا يحتوي نفس العدد من الرؤوس .

الباب الرابع

طي التراكيب المبسطة

Folding of simplicial complexes

الباب الرابع

طي التراكيب المبسطة

Folding of simplicial complexes

أي عديد طيات M مترابط و متراص و بدون محيط من البعد الثاني (سطح) يسمح بتثليثـــه إلى عدد محدود من المبسطات ، و هذا يمكننا من تعريف دوال متصلة $f: M \to P_3$ على تركيب مـــبسط P_3 (مضلع ثلاثي) ، هذه الدوال تكون دوال مبسطة إذا كان لكل مبسط σ من بعد i حيث $i = 0,1,2$ يكون تقييد الدالة $f|\sigma$ (*restrection*) هو تشاكل شكلي على مبسط من بعد i في P_3 .

قمـــنا في هذا الباب بعرض بعـــض الخواص العامة المـــتعلقة بـــالطي المبسط ، ثم قمنا بتصنيف التثليثات المخـــتلفة لـــلسطوح المتراصة و المترابطة سواءً كانت هذه السطوح موجهة أو غير موجهة التي تسمح بطي السطح طيًا مبسطًا .

(4 – 1) خواص عامة للطي المبسط

General properties of simplicial folding

نفرض أن $f \in \mathscr{S}(M, P_3)$ هي دالة طي مبسط من تركيب مبسط M فراغه الأساسي هو عديد طيات مترابط ومتراص وبـــدون محيط ومن البعد الـــثاني (سطح) على تركيب مبسط P_3 يتـــكون من ثـــلاث مـــبسطات صفرية (رؤوس) و ثلاث مبسطات أحادية (أحرف) و مبسط ثنائي واحد (وجه) .

كما سبق الإشارة في الباب السابق دالة الطي المبسط f سترسل مبسطات σ من بعد i حيث $i = 0,1,2$ على مبسطات من P_3 من نفس البعد . لأي طي مبسط f يوجد تقسيم محدود لـــلسطح M بواسطة النقاط المنفردة تكون فيها المبسطات الصفرية والأحادية مخطط

محـــدود Γ_f بـــدون عـــقد (يمكن أن يحتوي على أحرف مزدوجة) وتقوم الدالة f بطي التـــركيب المبسط M على أحرف هذا المخطط (المبسطات الأحادية) . لتجنب الحالات البسيطة سنفرض أن كل مبسط صفري هو نقطة نهاية لأكثر من مبسطين أحاديين .

كما سبق التنويه في الباب الثاني إذا كانت الدالة $f : M \to P_3$ هي دالة طي مبسط ، Γ_f هو مخططها فإن عدد المبسطات الأحادية و التي يمثل v رأس لها حيث $v \in \Gamma_f$ تسمى رتبة الـــرأس ، و تكون دالة الـــطي المبسط f منتظمة إذا وإذا فقط كانت جميع رؤوس المخطـــط Γ_f لهـــا نفس الرتبة . بصـــورة عامة إذا كان M سطح متراص فإن كل رأس من رؤوس المخطط رتبته زوجية ≤ 4 .

تعاريف (4 – 1) ، [14] :

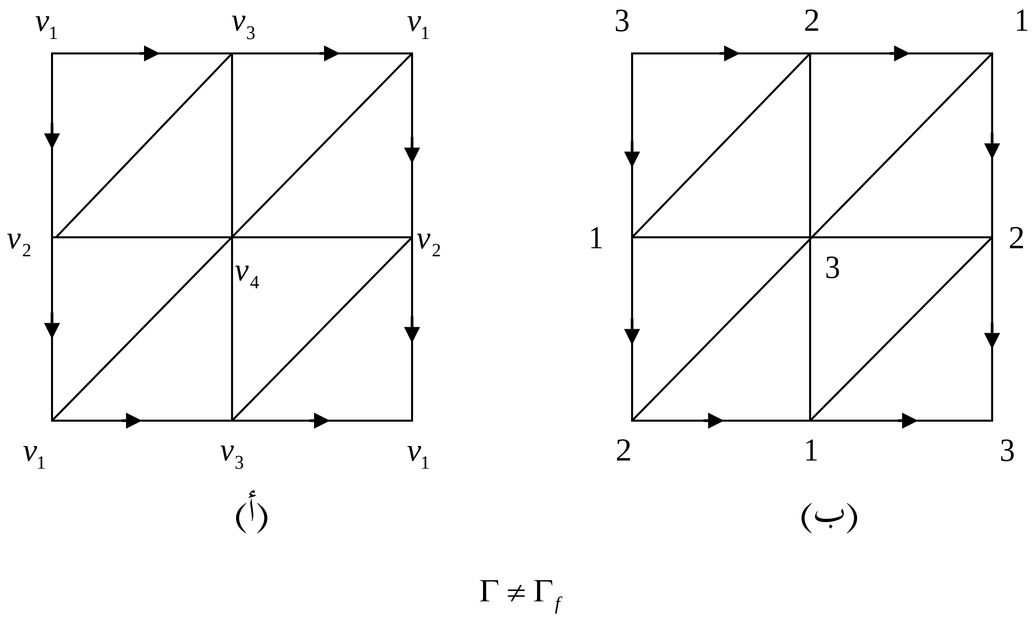
(أ) إذا كان f طي مبسط منتظم كل رأس فيه له رتبة k فيقال أن f طي مبسط منتظم من النوع $(k,3)$.

(ب) يـــقال أن مخطط Γ قابل للتلوين بعدد n من الألوان (*n-colourable*) إذا وإذا فقط أمكن وسم رؤوسه بالأرقام $1,2,...,n$ بحيث أن نقطتي النهاية المختلفتين لأي حرف يكون لهما وسمين مختلفين.

(جـ) إذا كان Γ هو مخطط مغموس في سطح M بحيث أن كل مبسط ثنائي من مبسطات $M \setminus \Gamma$ له n من الرؤوس يقـــال أن المخطط Γ قابل للتلوين دوريًا بعدد n من الألـــوان (*a cyclic n-colouring*) إذا كان قابل للتلوين بعدد n من الألوان بحيث أن رؤوس كل مبسط ثنائي يمكن وسمها دوريًا حسب الترتيب الطبيعي للأرقام $1,2,....,n$.

(د) يقال لأي طيان خلويان $f:M\to P_r, g:N\to P_s$ أنهما متكافئان و تكتب $f\approx g$ إذا و إذا فقط وجدت دالتي تشاكل شكلي $\sigma:M\to N, \tau:P_r\to P_s$ بحيث أن $g\circ\sigma=\tau\circ f$، أي أن $f\approx g$ إذا و إذا فــقــط وجــدت دالــة تشاكل شكلي $\sigma:M\to N$ بحيث أن $\sigma(\Gamma_f)=\Gamma_g$. يتــضح من ذلــك أن $\sigma|\Gamma_f$ هو تماثل للمخطط Γ_f على المخطط Γ_g ، و أنه إذا كان $f\approx g$ فإن $r=s$.

السؤال المطروح الآن هو هل كل مخطــط Γ مغموس في سطح M بحيث يكون كل $M\setminus\Gamma$ هو مبسط ثنائي وكل رأس من رؤوسه له رتبة زوجية ≥ 4 يمثل مخطط طي مبسط Γ_f لدالة طي مبسط $f:M\to P_3$ ؟ ولمعرفة الإجابة على هذا السؤال نعتبر المثال التالي :إذا كان السطح الكعكي T^2 مقسم بالتقسيــمات الموضحة بالشكل (4 – 1) (أ) هذا الشكل يوضح مخطط له 4 رؤوس ، و 12 حرف تحيط بثمان أوجه مثلثية وكل رأس في المخطط رتبته تساوي 6 ،لكن لا يوجد طي مبسط $f:M\to P_3$ يكون فيه $\Gamma=\Gamma_f$ لأن المخطط Γ يجب أن يكون قابل للتلوين دوريًا بثلاث ألوان و هذا لا يتحقق هنا شكل (4 – 1) (ب).



شكل (4 – 1)

النظرية التالية توضح ذلك

نظرية (4 – 1) ، [14] :

نفرض أن Γ هو مخطط محدود و مترابط مغموس في سطح M بحيث يكون كل وجه $M \setminus \Gamma$ له n من الرؤوس . المخطط $\Gamma = \Gamma_f$ حيث ، $f : M \to P_n$ هو طي خلوي إذا و إذا فقط كان Γ قابل للتلوين دوريًا بواسطة n من الألوان .

يتضح من هذه النظرية أنه في حالة الطي المبسط يكون المخطط Γ مخطط طي مبسط إذا و إذا فقط كان قابل للتلوين دوريًا بواسطة ثلاث ألوان .

نذكر مرة أخرى بأن أي سطح متراص و مترابط M يكون متشاكل شكليًا مع الكرة S^2 أو الجمع المترابط لعدد g من السطوح الكعكية $\#^g T^2$ أو الجمع المترابط لعدد p من مستويات الإسقاط $\#^p P^2$ ، و أن الأعداد g, p تسمى جنس السطح مع ملاحظة أن الكرة S^2 من الجنس 0 . أيضًا السطوح المتشاكلة شكليًا مع S^2 أو $\#^g T^2$ هي سطوح موجهة بينما السطوح المتشاكلة شكليًا مع $\#^p P^2$ هي سطوح غير موجهة ، أيضًا عدد أويلر $e(M)$ للسطح M إما يساوي $2-2g$ أو $2-p$ ، [22] .

يرمز بالرمز $O_g(3)$ لمجموعة فصول التكافؤ للطيات المبسطة للسطوح الموجهة من الجنس g و بالرمز $N_p(3)$ لمجموعة فصول التكافؤ للطيات المبسطة للسطوح غير الموجهة من الجنس p .

نظرية (4 – 2) ، [14] :

لـــكل طي خلوي $f:M\rightarrow P_n$ لـــه α من الرؤوس و β من الأحرف و γ من الأوجه يتحقق التالي :

$$n\gamma = 2\beta \qquad (4-1)$$

$$\alpha - \beta + \gamma = e(M) \qquad \text{(معادلة أويلر)} \qquad (4-2)$$

$$n\gamma \geq 4\alpha \qquad \text{(كل رأس له رتبة } \geq 4\text{)} \qquad (4-3)$$

$$e(M) \leq \alpha\left(\left(\tfrac{4}{n}\right)-1\right) \qquad (4-4)$$

إذا كان f طي منتظم من النوع (k,n) فبالإضافة إلى الخواص السابقة يتحقق التالي :

$$k\alpha = n\gamma = 2\beta \qquad (4-5)$$

إذا كان السطح M سطح موجه من الجنس g ، فإن:

$$g = 1 + \frac{(k-2)(n-2)-4}{4n}\alpha \qquad (4-6)$$

إذا كان السطح M سطح غير موجه من الجنس p ، فإن:

$$p = 2 + \frac{(k-2)(n-2)-4}{2n}\alpha \qquad (4-7)$$

في حـــالة الطي المـــبسط و هو موضوع دراستنا فإن $n=3$ ، في هذه الحالة تأخذ العلاقتين $(4-6)$ ، $(4-7)$ الصورتين التاليتين :

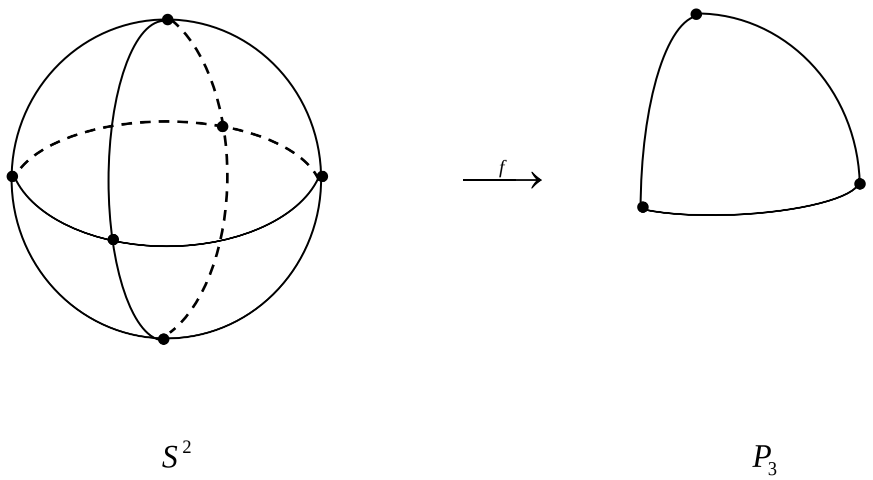
$$g = 1 + \frac{k-6}{12}\alpha \qquad (4-8)$$

$$p = 2 + \frac{k-6}{6}\alpha \qquad (4-9)$$

فيـــما يلي سوف نقوم بتصنيف كل الطيات المبسطة للسطوح سواءً كانت موجهة أو غير موجهة .

(4 – 2) الطي المبسط لسطح الكرة
Simplicial folding of the sphere

إذا كانت $S^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ هي كرة الوحدة في الفراغ الإقليدي $\Re^3$ و P_3 هو الجـــزء الناتج من تقـــاطع الكرة S^2 مع الثمن الموجب ، فإن الدالة $f : S^2 \to P_3$ المعرفة كالتالي : $f(x,y,z) = (|x|,|y|,|z|)$ ، تمثل طي مبسط للكرة S^2 على P_3 ، أنظر شكل (4 – 2) .



شكل (4 – 2)

مخـــطط هذه الـــدالة Γ_f متماثل مع المخطط المكون من أحرف و رؤوس مثمن السطوح (المجسم ثماني الأوجه) (octahedrom) و هو قابل للتلوين . هذا الطي يسمى بالطي المثمن (octahedrol folding) لـــلـــكـــرة و يرمز له بالرمز ω و مخطط الطي له يتكون من 6 رؤوس ، و 12حرف ، و 8 أوجه .

ملاحظة (4 − 1) ، [25] :

إذا كان Γ مخطط مغموس على سطح الكرة S^2 بحيث أن كل وجه في $S^2\backslash\Gamma$ محاط بمضلع له 3 أحرف ، في هذه الحالة سيكون المخطط المرافق له كـــل رأس فيه رتبته 3 تسمى هذه الدالة بالدالة المكعبة (cubic map) . هذه الدالة المكعبة (على S^2) تكون قابلة للتلوين دوريـــاً بـــثلاث ألوان إذا و إذا فـــقط كان كل وجـــه فيها محـــدود بعدد زوجـــي من الرؤوس .

يتضح من ذلك أنه إذا كـــان كل رأس من رؤوس المخطـــط Γ المغموس على S^2 له رتبة زوجية ≥ 4 فإن المخطط سيكون قابل للتلوين .

نظرية (4 − 3) :

أي طـــي مـــبســـط مـــنـــتـــظم لـــلـــكـــرة S^2 يـــكـــافـــئ ω .

الـــبـــرهـــان:

نفرض أن $f: S^2 \to P_3$ هو طي منتظم للكرة S^2 على المضلع P_3 من النوع $(k,3)$ حيث k هي رتبة كل رأس تكون عدد زوجي ≥ 4 . نفرض أن Γ_f يقسم سطح الكرة إلى α من الرؤوس ، و β من الأحرف ، و γ من الأوجه . باستخدام العلاقة $(4-8)$ مع الأخذ في الاعتبار أن $g=0$ نحصل على :

$$0 = 1 + \frac{k-6}{12}\alpha$$

و عليه فإن

$$\alpha = \frac{12}{6-k} \qquad (4-10)$$

وحيث أن $k \geq 4$ فإنه في حالة $k = 4$ تكون $\alpha = 6$ ، وباستخدام العلاقة $(4-5)$ نجد أن $\gamma = 8, \beta = 12$ ، أي أن مخطط الطي له 6 رؤوس ، و 12حرف ، و 8 أوجـــه و عليه فإن $k \geq 6$ مستبعدة و ذلك لأن α في هذه الحالة ستكون غير معرفة أو سالبة ، أي $f \approx \omega$. أن الحالة الوحيدة التي يمكن فيها طي الكرة طيًا مبسطًا منتظمًا هي $k = 4$.

نظرية ($4-4$) :

يمـــكن طي الكرة طيًا مبسطًا إذا كانت عدد رؤوس مخطط الطي α، و عدد أحرفه β، و عدد أوجهه γ تحقق العلاقات التالية :

$$\alpha = 2i + 4 \quad , \quad \beta = 6i + 6 \quad , \quad \gamma = 4i + 4 \quad , \quad i = 1,2,...$$

أي أن الـــفـــصـــل $O_0(3)$ مـــجـــمـــوعـــة لا نـــهـــائـــيـــة قـــابـــلـــة لـــلعد .

الـــبـــرهـــان:

نفرض أن $f_m \in \mathscr{S}(S^2, P_3)$ $(f_m : S^2 \to P_3)$ هي دوال طي مبسط للكرة على P_3 .
باستخدام العلاقات $(4-2)$, $(4-1)$ نجد أن :

$$3\gamma = 2\beta \qquad (4-11)$$

$$\alpha - \beta + \gamma = 2$$

إذن

$$2\beta - 2\gamma = 2\alpha + 4$$

و باستخدام $(4-11)$ نحصل على

$$\gamma = 2\alpha - 4 \qquad (4-12)$$

أيضًا من العلاقة $(4-4)$ نجد أن

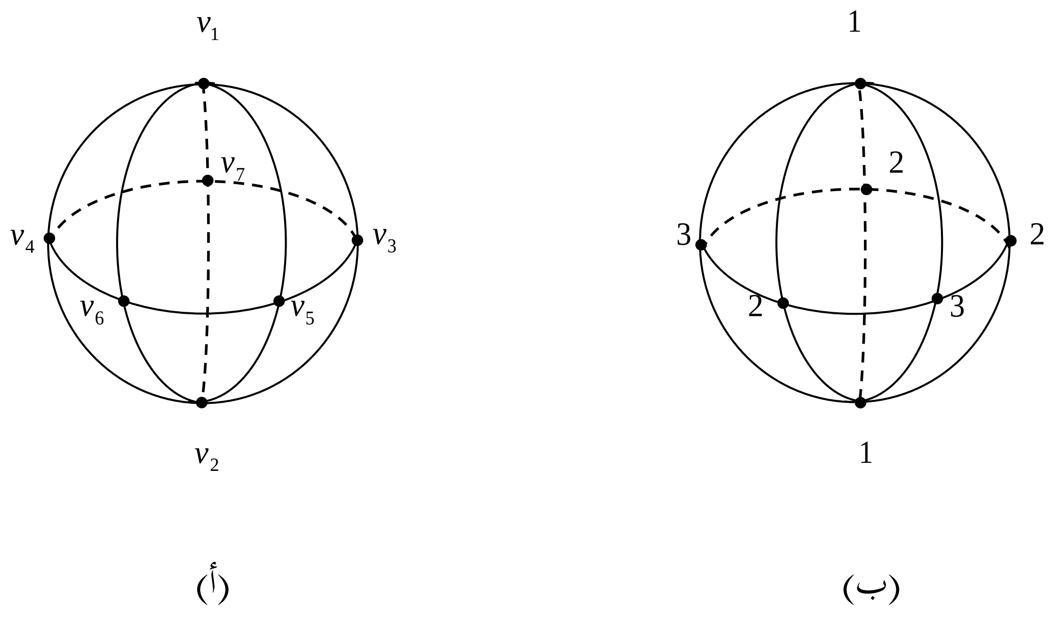
$$e(M) \leq \alpha\left(\frac{4}{3} - 1\right)$$

أي أن $2 \le \frac{1}{3}\alpha$ ، إذن

$$\alpha \ge 6 \qquad (4-13)$$

إذا اعتبرنا $\alpha = 6$ و باستخدام (4-11) ، (4-12) نحصل على $\beta = 12$ ، $\gamma = 8$ و هذا كما سبق توضيحه هو الطي المثمن ω ، و ليكن $f_1 = \omega$.

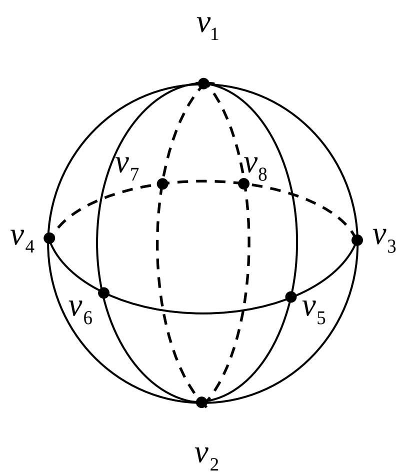
نعتــبر الآن أن $\alpha = 7$ و باستخدام العلاقتين (4-11) ، (4-12) نــحصــل على $\beta = 15$ ، $\gamma = 10$. أي أن هذا المخطط سيكون لــه 7 رؤوس ، و 15أحــرف ، و 10 أوجه. هذا المخطط يمكن غــمسه في سطح الكرة كمــا هو موضح بالشكل (4 - 3) (أ) و لكنه لا يمثل مخطط طي مبسط و ذلك لأن كل من الرأسين v_1, v_2 رتبته فردية بالإضافة إلى أنه غير قابل لــلتلوين دوريــاً بثلاث ألوان ، أنظر شكل (4 - 3) (ب) حيث الأرقام 1,2,3 تشير إلى الألوان .



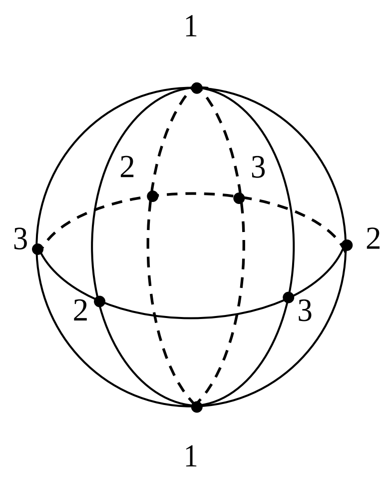
شكل (4 - 3)

يجب ملاحظة أنه إذا كان عدد الرؤوس α فردي و حتى تتحقق العلاقة $\sum_{v\in\Gamma_f} d(v) = 2|E|$ مع الأخذ في الاعتبار أن رتبة كل رأس ≤ 4 و أن عدد الرؤوس التي لها رتبة فردية هو عدد زوجي فإنه يوجد على الأقل رأسان لهما رتبة فردية و بالتالي فإن المخطط لا يمثل مخطط طي مبسط .

نعتبر الآن أن $\alpha = 8$ و باستخدام $(4-12)$ ، $(4-11)$ نحصل على $\beta = 18$ ، $\gamma = 12$. أي أن المخطط سيكون له 8 رؤوس ، و 18 أحرف ، و 12 أوجه . هذا المخطط يمكن غمسه في سطح الكرة ، كما هو موضح بالشكل (4 – 4) (أ) و كل رأس من رؤوسه له رتبة زوجية وهو قابل للتلوين دوريًا بثلاث ألوان ، أنظر شكل (4 – 4) (ب) ، و بذلك المخطط الناتج يمثل مخطط طي مبسط Γ_{f_2} دالته هي $f_2 : S^2 \to P_3$ ، إذن $f_2 \in \mathscr{S}(S^2, P_3)$.



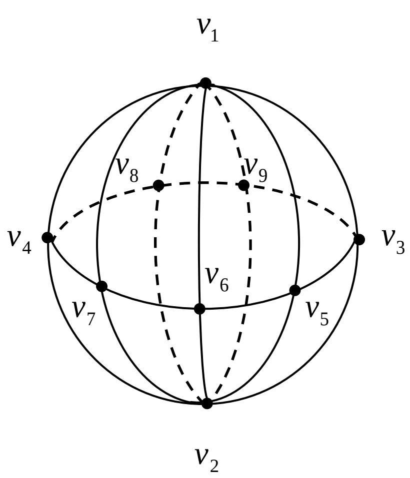
(أ)



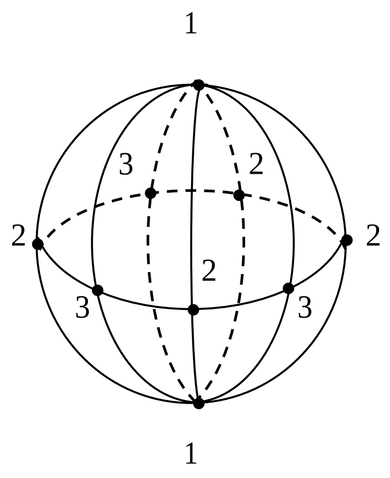
(ب)

شكل (4 – 4)

نعتبر الآن أن $\alpha = 9$ و باستخدام (4–12) ، (4–11) نحصل على $\beta = 21$ ، $\gamma = 14$. هذا المـــخطط لا يمثل مخطط طي مبسط لوجود رأسين على الأقل لهما رتبة فردية ، شكل (4 – 5) (أ) يمثل أحد الطرق التي يمكن غمس المخطط فيها على الكرة ، بالإضافة إلى أن هذا المخطط غير قابل للتلوين دوريًا بثلاث ألوان ، شكل (4 – 5) (ب) .



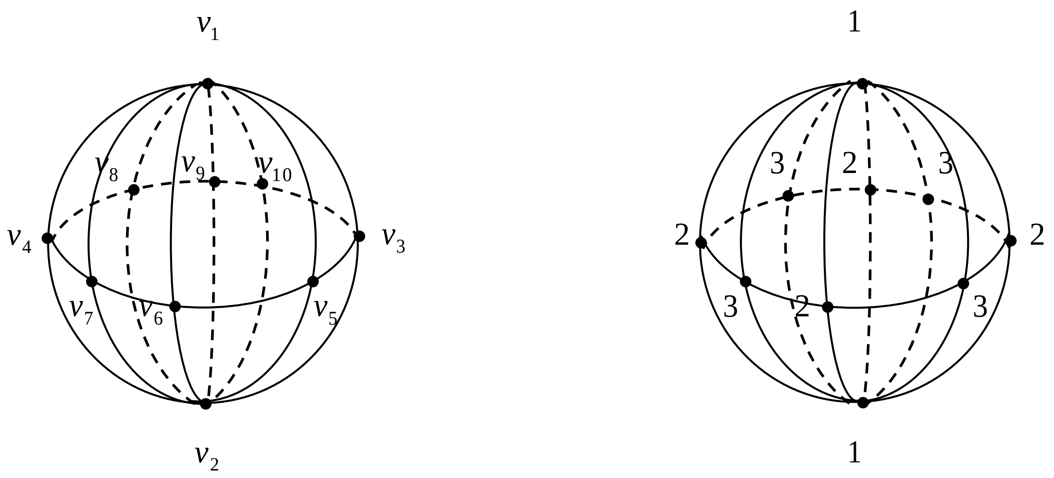
(أ)



(ب)

شكل (4 – 5)

نعتبر الآن أن $\alpha = 10$ و بـــاستخدام العـــلاقات (4–12) ، (4–11) نحصل على $\beta = 24$ ، $\gamma = 16$. و يـــكون المخطـــط مغموس في سطح الكـــرة كما هو موضح بالشكل (4 – 6) (أ) و كل رأس من رؤوسه له رتبة زوجية و هو قابل للتلوين دوريـــًا بثلاث ألوان ، انظر شكل (4 – 6) (ب) ، و بذلـــك المخطط الناتج يمثل مخطط طي مبسط Γ_{f_3} دالته هي $f_3 : S^2 \to P_3$ ، إذن $f_3 \in \mathscr{S}(S^2, P_3)$.



(أ) (ب)

شكل (4 – 6)

بصورة عامة نجد أن سطح الكرة يمكن طيه طيًا مبسطاً إذا كان عدد رؤوس المخطط $\alpha=(2i+4)$ ، و عدد أحرفه $\beta=(6i+6)$ ، و عدد أوجهه $\gamma=(4i+4)$ حيث $i=1,2,...$ ، و هذا يعني أنه يوجد عدد لا نهائي قابل للعد من الطيات المبسطة للكرة S^2 على المضلع P_3 أي أن $O_0(3)$ مجموعة لانهائية قابلة للعد .

(4 – 3) الطي المبسط للسطح الكعكي

Simplicial folding of the torus

كما هو معروف سابقًا أن السطح الكعكي هو عديد طيات موجه من الجنس 1 و سوف نقوم الآن بتصنيف كل الطيات المبسطة له .

نظرية (4 – 5) :

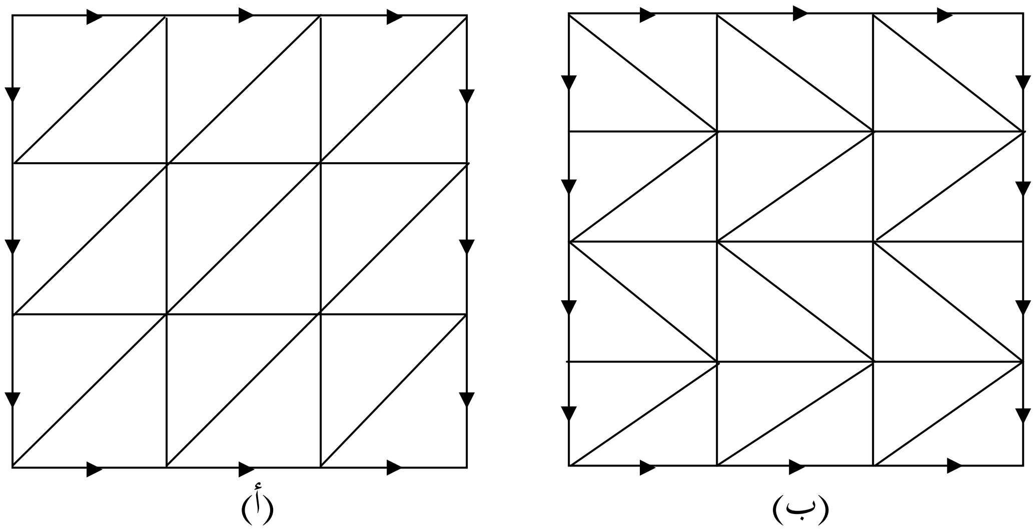
أي طـــي مـــبســـط مـــنـــتـــظم لـــلسطـــح الكعكي سيكون من النوع $(6,3)$.

البـــرهـــان:

ليكن $f:T^2 \to P_3$ طيًا مبسطًا منتظمًا للسطح الكعكي T^2 على المضلع P_3 من النوع $(k,3)$ حيـــث k هي رتبة كـــل رأس تكون عـــدد زوجي $4 \le$. نفرض أن Γ_f يقسم السطح الكعكي T^2 إلى α من الـــرؤوس ، و β من الأحرف ، و γ من الأوجه . باستخدام العلاقة $(4-8)$ مع الأخذ في الاعتبار أن $g=1$ نحصل على :

$$1 = 1 + \frac{k-6}{12}\alpha$$

و بالتالي فإن $(k-6)\alpha = 0$ ، و حيث أن $\alpha \neq 0$ فإن $k=6$ ، هذا يـــعني أن رتبة كل رأس في هذه الحـــالة هي 6 و عليه فإن الطي المبسط المـــنتظم لـــلسطح الكعكي T^2 على P_3 سيكون من النوع $(6,3)$ ، شكل (4 – 7) يمثل طيان مبسطان منتظمان للسطح الكعكي غير متكافئان من النوع $(6,3)$. يجب ملاحظة أنه يوجد العديد من الطيات المبسطة المنتظمة غير المتكافئة و لكن جميعها من النوع $(6,3)$.



طيان مبسطان منتظمان غير متكافئان للسطح الكعكي

شكل (4 – 7)

نظرية (4 – 6) :

يمكـــن طي السطـــح الكعكي طيًا مبسطًا إذا كـــان عدد رؤوس مخطط الطي α ، و عدد أحرفه β ، و عدد أوجهه γ تحقق العلاقات التالية :

$\alpha = 4i + 4 \quad , \quad \beta = 12i + 12 \quad , \quad \gamma = 8i + 8 \quad , \quad i = 1,2,3,...$

أو العلاقات التالية :

$\alpha = 9i \quad , \quad \beta = 27i \quad , \quad \gamma = 18i \quad , \quad i = 1,2,3,...$

أي أن الـــفـــصـــل $O_1(3)$ مـــجـــمـــوعة لا نـــهـــائية قـــابـــلـــة لـــلـــعـــد .

الـــبـــرهـــان:

نفـــرض أن $f_m \in \mathscr{S}(T^2, P_3)$ هي دوال طي مـــبسط لـــلسطح الكعكي على P_3

في هذه الحالة العلاقة $(4-2)$ تأخذ الصورة : $2\beta - 2\gamma = 2\alpha$

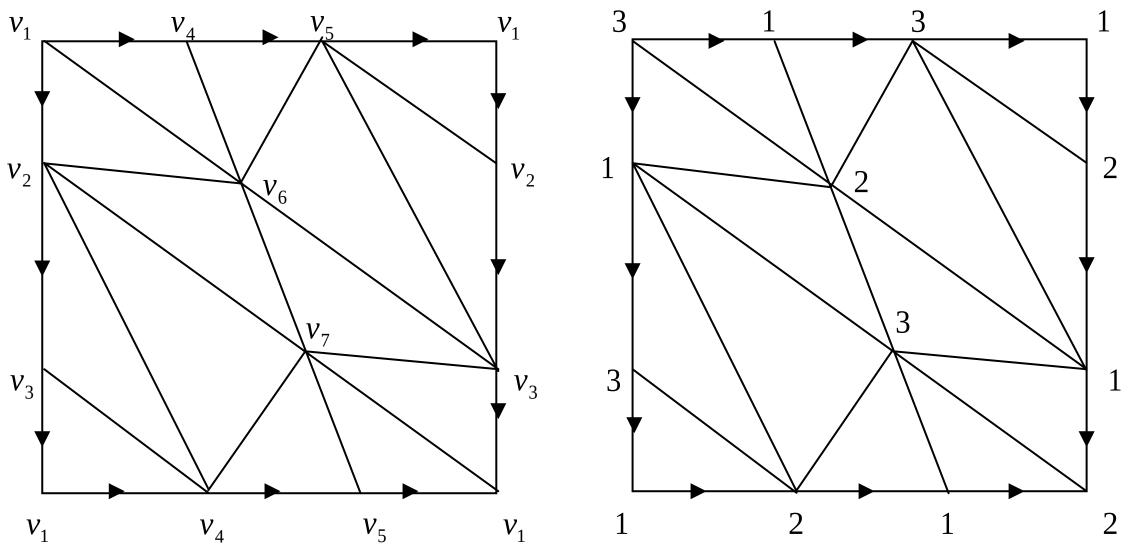
ولكن من $(4-11)$ نجد أن $3\gamma = 2\beta$ ، و بالتالي فإن :

$$\gamma = 2\alpha \qquad (4-14)$$

أيضًا بما أن $e(M) \le \alpha\left(\frac{4}{3} - 1\right)$

فإن $0 \le \frac{1}{3}\alpha$ ، إذن $\alpha \ge 0$. و لـــكن كما ســبق الإشارة في الباب الأول فإن الحد الأدنى لعدد الرؤوس اللازم لتثليث السطح الكعكي هو $\alpha \ge \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24e(M)}) = 7$.

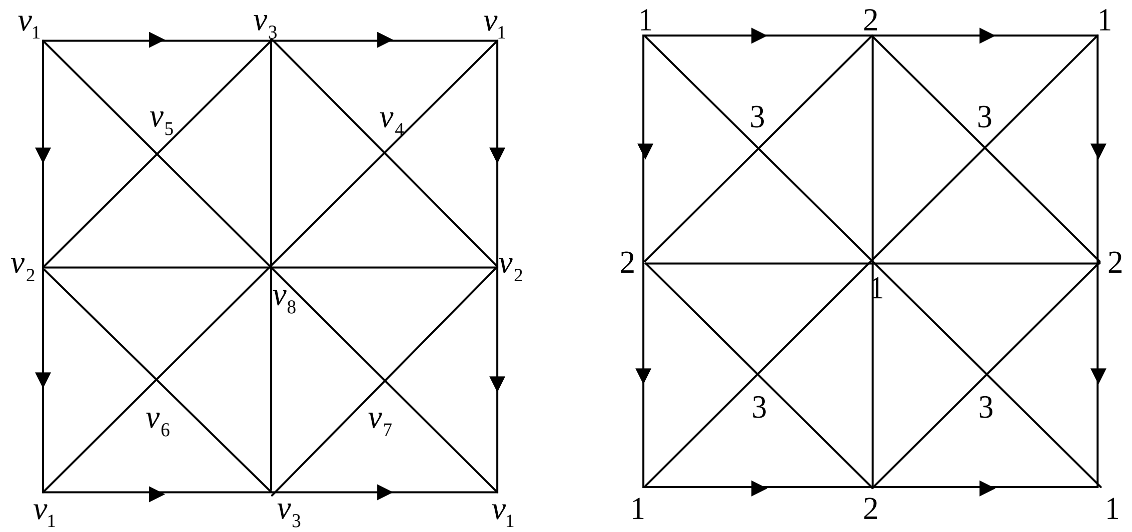
عندما $\alpha = 7$ نحصل على $\gamma = 14$ ، $\beta = 21$ ، هذا المخطط يمكن غمسه في السطح الكعكي كــمخطط مــنتظم رتبة كل رأس فيه تساوي 6 شكل $(4-8)$ (أ) ، و لكنه غير قابل للتلوين كما في شكل $(4-8)$ (ب) ، و بالتالي لا يمثل مخطط طي مبسط .



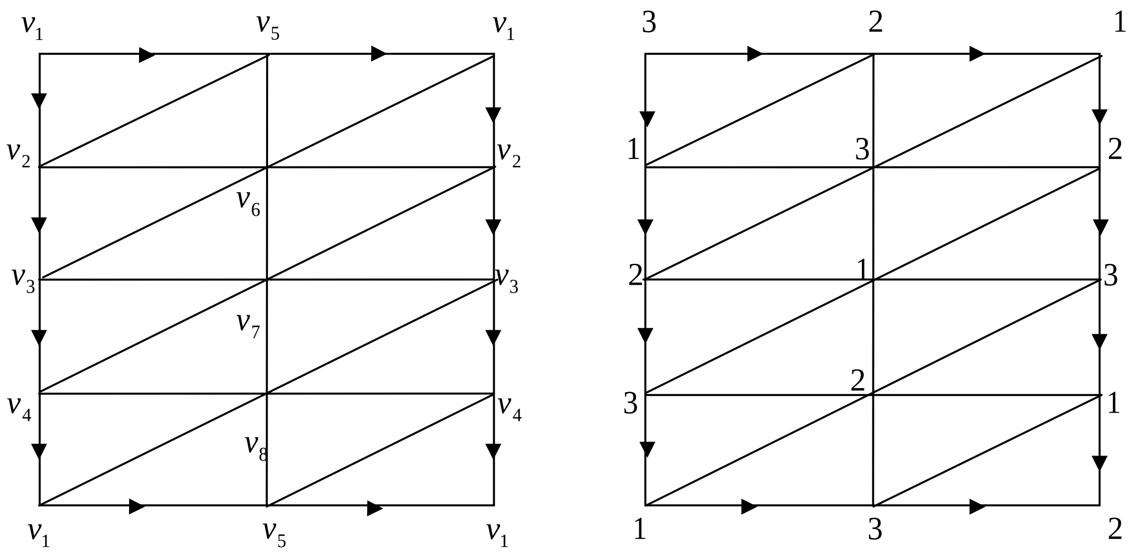
(أ) (ب)

شكل $(4-8)$

عندما $\alpha = 8$ نحصـــل على $\gamma = 16$ ، $\beta = 24$. هذا المخطـــط يـــمكن غمسه في السطح الكعكي بأكثر من طريقة بعضها قابل للتلوين و الآخر غير قـــابل للتلوين ، كما هو موضح بالشـــكل (4 – 9) . بالتالي فيمكننا أن نعرف طي مبسط $f_1 : T^2 \to P_3$ عـــلى السطح الكعكي مخططه Γ_{f_1} قابل للتلوين ، أي أن $f_1 \in S(T^2, P_3)$



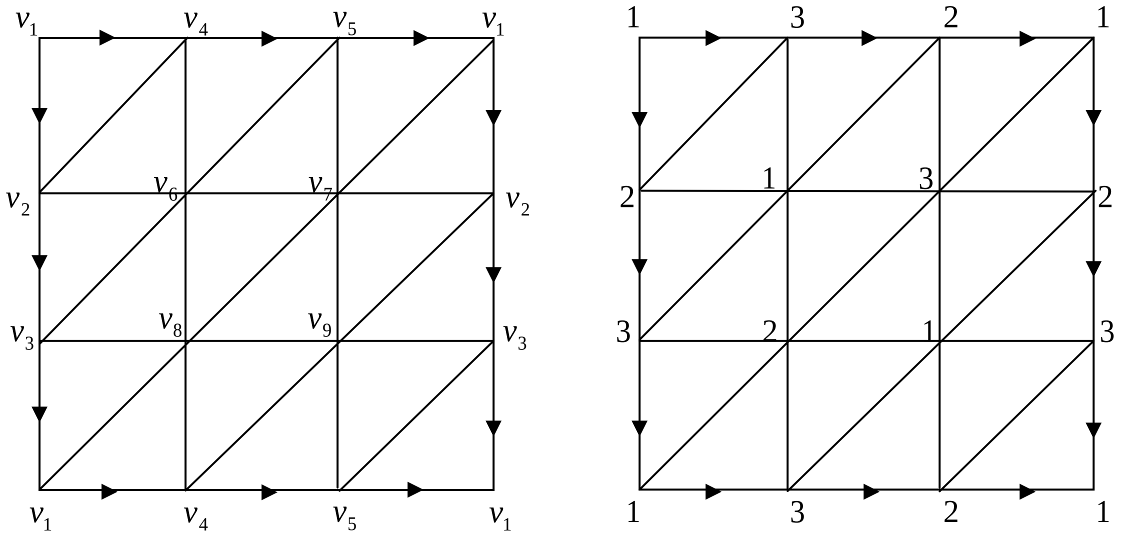
مخطط قابل للتلوين فيه $\alpha = 8$



مخطط غير قابل للتلوين فيه $\alpha = 8$

شكل (4 – 9)

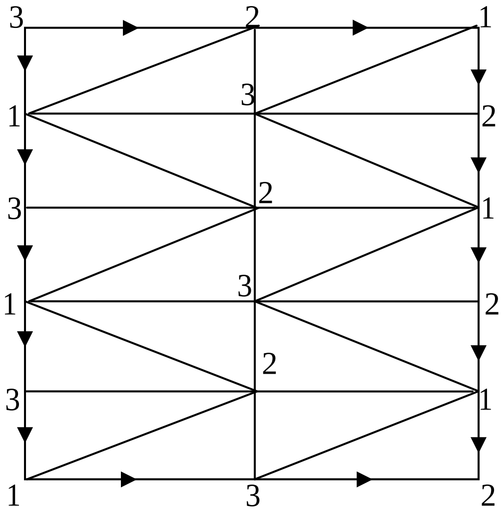
عندما $\alpha = 9$ نحـــصل على $\gamma = 18$ ، $\beta = 27$. هذا المخطـــط يـــمكن غمسه في السطح الكعكي كمخطط منتظم رتبة كل رأس فيه تساوي 6 شكل $(4-10)$ (أ) و هو قابل للتلوين دوريًا بثلاث ألوان شكل $(4-10)$ (ب) ، ، و بذلـــك المخطط الناتج يمثل مخطط طي مبسط Γ_{f_2} دالته هي $f_2 : T^2 \to P_3$ ، إذن $f_2 \in \mathscr{S}(T^2, P_3)$.



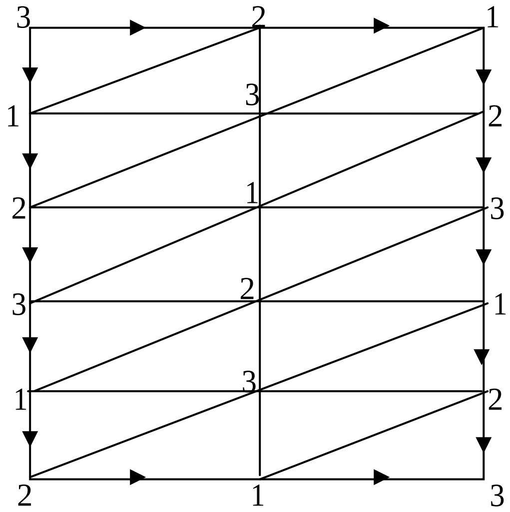
(أ) (ب)

شكل $(4-10)$

عندما $\alpha = 10$ نحصل على $\gamma = 20$ ، $\beta = 30$. هذا لمخطط يمكن غمسه في السطح الكـــعـــكي بأكثر من طريقة كمخطـــط منتظم كما هو في شكل $(4-11)$ (أ) ، (ب) و مخطط غير منتظم كما هو في شكل $(4-11)$ (ج) ، (د) و في كل مرة لا يمكن تلوين المخطط دوريًا بثلاث ألوان ، و بالتالي لا يمثل مخطط طي مبسط .

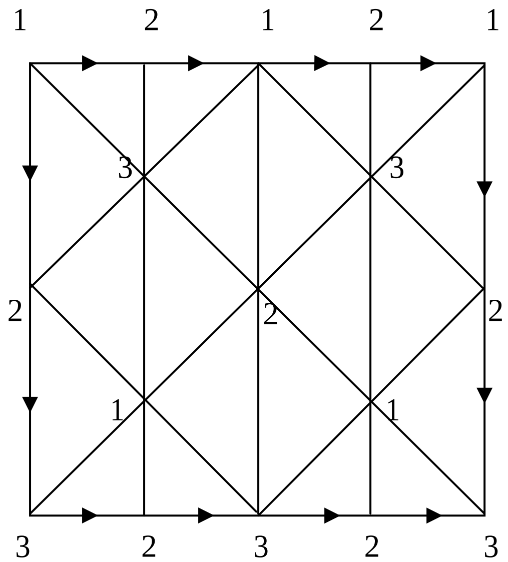


(أ)

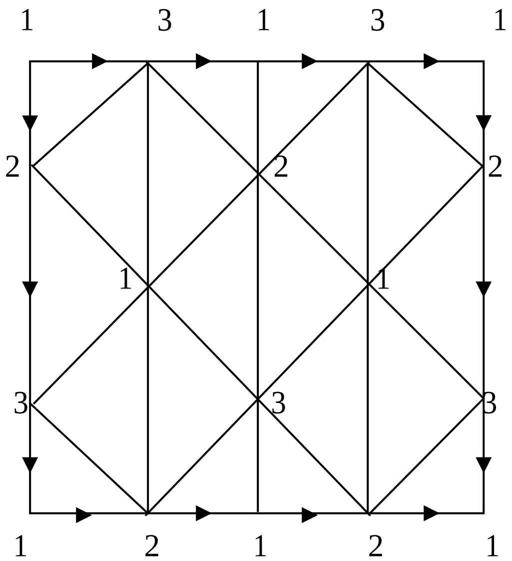


(ب)

مخططات منتظمة فيها $\alpha = 10$ غير قابلة للتلوين



(جـ)



(د)

مخططات غير منتظمة فيها $\alpha = 10$ غير قابلة للتلوين

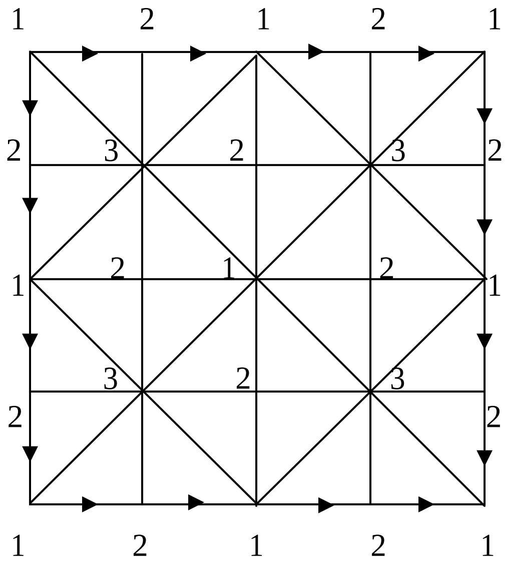
شكل (4 – 11)

و باعتبار القيم المختـــلفة لعدد الـــرؤوس α يمكن حصر الحالات التي يمكن فيها طي السطح الكعكي طيًا مبسطًا كما هو موضح في النظرية وفي هذه الحالة يكون الفصل $O_1(3)$ مجموعة لا نهائية قابلـــة للعد. شكل (4 ـ 12) يبين بعض المخططات التي يمكن غمسها في السطح الكعـــكي و القابلة للتلوين و التي تمثل طي للقيم المختلفة لعدد الرؤوس α و تحقق العلاقات :

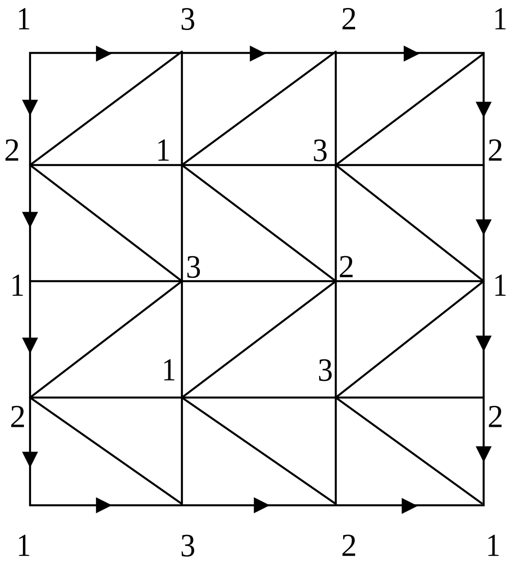
$$\alpha = 4i + 4 \quad , \quad \beta = 12i + 12 \quad , \quad \gamma = 8i + 8 \quad , \quad i = 1,2,3,...$$

بينـــما شكل (4 ـ 13) يـــبين بعض المخططات التي يمكن غمسها في السطح الكعكي و القابلة للتلوين و التي تمثل طي للقيم المختلفة لعدد الرؤوس α و تحقق العلاقات:

$$\alpha = 9i \quad , \quad \beta = 27i \quad , \quad \gamma = 18i \quad , \quad i = 1,2,3,...$$

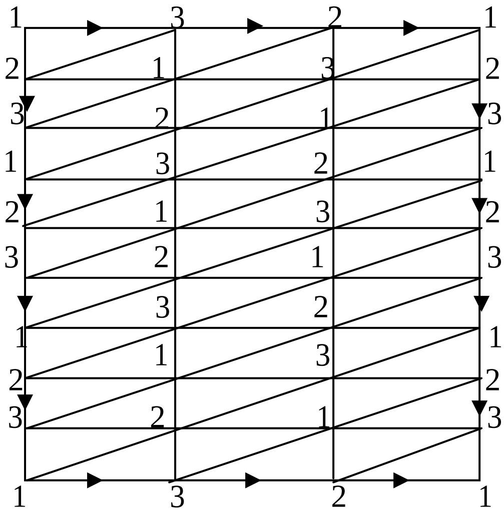


$\alpha = 16$

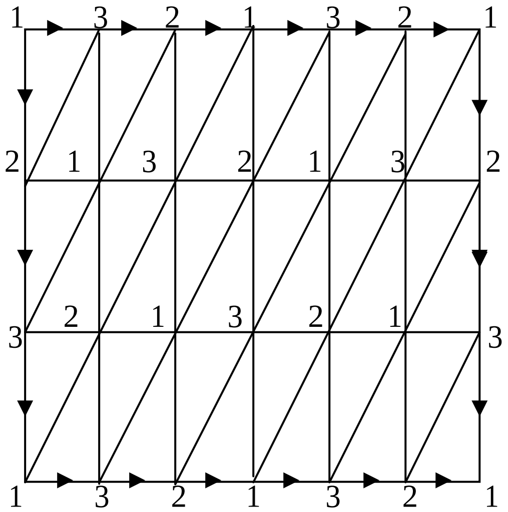


$\alpha = 12$

شكل (4 − 12)



$\alpha = 27$



$\alpha = 18$

شكل (4 – 13)

(4 – 4) الطي المبسط للجمع المترابط للسطوح الكعكية
Simplicial folding of the connected sum of tori

سوف نبدأ أولاً بالطي المبسط للسطح الكعكي المزدوج ، فكما علمنا من الباب الأول نحصل على السطح الكعكي المزدوج $T_1^2 \# T_2^2$ من الجمع المــترابط لسطحين كعكيين T_1^2, T_2^2 ، وهو عديد طيات موجه من الجنس 2 .

<u>نظرية (4 – 7)</u> :

لا يمــكــن طــي الـــســـطـــح الــكــعــكي الـــمزدوج طيًا مبسطًا منتظمًا .

البـــرهـــان :

باستخدام العلاقة $(8-4)$ مع الأخذ في الاعتبار أن $g = 2$ نحصل على :

$$2 = 1 + \frac{k-6}{12}\alpha$$

إذن
$$12 = (k-6)\alpha$$

و عليه فإن
$$\alpha = \frac{12}{k-6}$$

بما أن α هي عـــدد رؤوس مخطط الطي بالــتالي فإن $\alpha > 0$ و هذا يؤدي إلى أن $k > 6$.
أيضـــًا إذا كـــان $k > 10$ فإن $\alpha \le 2$ وهذا مرفوض وعليه فإن $k \le 10$ ، أي أن $6 < k \le 10$ و هذا يعني أن $k = 8$ أو $k = 10$.

عندما $k = 8$ فإن $\alpha = 6$ و لكن أن الحد الأدنى لعدد الرؤوس اللازم لتثليث السطح الكعكي المزدوج هو :

$$\alpha \ge \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24e(M)}) = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 + 48}$$
$$\therefore \alpha \ge 8$$

إذن لا يمكن تثليث السطح الكعكي المزدوج عندما $\alpha = 6$

إذا كان $k = 10$ فإن $\alpha = 3$ ، و هذا مستبعـــد أيضاً و بالــتالي لا يوجد طي مبسط منتظم للسطح الكعكي المزدوج .

نظرية $(4-8)$:

يمـــكن طي السطح الكعكي المزدوج طيًا مبسطًا عدد لا نهائي قابل للعد من الطيات ، أي أن الفصل $O_2(3)$ غير محدود .

البـــرهـــان :

نفرض أن كلاٍ من U,V سطينح كعكيين ، و أن كلاً من $f:U\to P_3, g:V\to P_3$ طيين مبسطين للسطح الكعكي على مثلث . نختار مثلث A في U رؤوسه x,y,z و مثلث آخر B في V رؤوسه x',y',z' حـــيث $f(x)=g(x'), f(y)=g(y'), f(z)=g(z')$. نزيل داخل المثلثان A,B فنحصل على سطحين U',V' ، بلصق U',V' معًا على محيط المثلثين بحيث تـــتطابق الأحرف xy,yz,zx مع الأحرف $x'y',y'z',z'x'$ على الترتيب فنحصل على السطح الكعكي المزدوج $W=U\#V$ (و هو متشاكل شكليًا مع $T^2\#T^2$) .

الآن نـــعرف دالة $h:W\to P_3$ كما يلي : $h|U'=f|U'$, $h|V'=g|V'$ ، الدالة h هي دالـــة طـــي مـــبســـط من السطح الكعكي المزدوج على مثلث ، فإذا رمزنا لعدد الرؤوس والأحرف و الأوجه بالرموز α,β,γ فإن :

$$\alpha_h=\alpha_f+\alpha_g-3,$$
$$\beta_h=\beta_f+\beta_g-3,$$
$$\gamma_h=\gamma_f+\gamma_g-1$$

أمـــا رتـــب الـــرؤوس الـــتي تـــم لـــصـــقـــها (x,y,z) في المخطط Γ_h فهي كالتالي : $d(x)=d(x)+d(x')-2$ و بالمثل بالنسبة لكل من y,z .

و بهذه الطريقة و باستخدام نظرية $(4-6)$ يمكن حصر كل الحالات التي يمكن فيها طي السطح الكعكي المزدوج طيًا مبسطًا على مثلث و هي بالطبع عدد لا نهائي قابل للعد.

ملاحظة $(4-2)$:

يمكن تعميم طريقة الإثبات المتبعة في هذه النظرية لتشمل الطي المبسط للجمع المترابط لعدد g من السطوح الكعكية و إثبات أن الفـــصل $O_g(3)$ سيـــكون غير محدود .

(4 – 5) الطي المبسط لمستوى الإسقاط

Simplicial folding of the projective plane

كـــما رأينا في الباب الأول أن مـــستوى الإســقاط هو عديد طيات غير موجه من الجنس 1 و سوف نقوم الآن بتصنيف كل الطيات المبسطة له.

نظرية (4 – 9) :

لا يمــكــن طـــي مـــســتوى الإســقــاط طــيًا مــبســطًا مــنــتــظــمًا.

البـــرهـــان :

باستخدام العلاقة $(4-9)$ حيث $p=1$ نحصل على : $1=2+\frac{k-6}{6}$

إذن $-6=(k-6)\alpha$

و بالتالي فإن

$$\alpha=\frac{6}{6-k} \qquad (4-16)$$

.بما أن α هي عدد رؤوس مخطـــط الطي و بالتالي فإن $\alpha>0$ و هذا يؤدي إلى أن $k<6$.

أيضـــًا يجـــب أن تـــكون $k\geq 4$ ، و عـــليه فإن $4\leq k<6$ ، أي أن $k=4$.

بالتـــعويض في العـــلاقة $(4-16)$ عن $k=4$ نحصل على $\alpha=3$ و لكن الحد الأدنى لعدد الـــرؤوس اللازمة لتثليث مستوى الإسقاط هو $\alpha\geq\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24e(M)})=\frac{1}{2}(7+5)=6$

و عليه فإنه لا يمكن طي مستوى الإسقاط طيًا مبسطًا منتظمًا .

نظرية (4 – 10) :

يمكن طي مـــستوى الإسقاط طيًا مبسطًا إذا كانت عدد رؤوس و أحرف و أوجه مخطط الـــطي لمستوى الإسقاط يخضع للقاعدة التالية :

$\alpha = i + 2 \quad , \quad \beta = 3i + 3 \quad , \quad \gamma = 2i + 2 \quad , \quad i = 1,2,3,...$

الـــبـــرهـــان :

نفـــرض أن P^2 هو مستوى إسقاط ،إذن يوجد غطاء مزدوج له بواسطة الكرة S^2 ، حـــيث $\theta : S^2 \to P^2$ هـــي دالـــة الإسقاط . فإذا كان $f : P^2 \to P_3$ طي مبسط لمستوى الإسقاط فإن الدالة $f \circ \theta : S^2 \to P_3$ هي أيضـــًا دالة طي مبـــسط ، و بـــالعكس إذا كان $g : S^2 \to P_3$ هو طيًا مبسطًا فإن هذا الطي و باستـــخدام دالة الإسقاط سينشئ طيًا مبسطًا من مستوى لإسقاط على P_3، [14] .

يتضح من ذلك أن الطيات المبسطة للكرة ستنشئ طيات مبسطة على مستوى الإسقاط فيها عدد الرؤوس و الأحرف و الأوجه نصف تلك الموجودة على الكرة ، و حيث أنه يمكن طي الكرة طيًا مبسطًا إذا كان عدد الرؤوس و الأحرف و الأوجه لمخطط الطي هـــي :

$\alpha = 2i + 4 \quad , \quad \beta = 6i + 6 \quad , \quad \gamma = 4i + 4 \quad , \quad i = 1,2,3,...$

فـــعليه فإن عدد الرؤوس و الأحرف و الأوجه لمخطط طي مستوى الإسقاط ستكون على الترتيب : $\alpha = i + 2 \quad , \quad \beta = 3i + 3 \quad , \quad \gamma = 2i + 2 \quad , \quad i = 1,2,3,...$.

(4 – 6) الطي المبسط للجمع المترابط لمستويات الإسقاط

Simplicial folding of the connected sum of projective planes

لنعتـــبر أولاً الجمع المترابط لمستويي إسقاط P_1^2, P_2^2 الذي يرمز له بالرمز $P_1^2 \# P_2^2$ هو عديد طيات غير موجه من الجنس 2 .

نظرية (4 – 11) :

أي طي مبسط منتظم للجمع المترابط لمستويـــي إســـقاط سيـــكون من الـــنوع $(6,3)$.

الـــبـــرهـــان :

باستخدام العلاقة $(4-9)$ حيث $p = 2$ نحصل على :
$$2 = 2 + \frac{k-6}{6}$$

إذن
$$(k-6)\alpha = 0$$

بما أن $\alpha \neq 0$ ، فإن $(k-6) = 0$ و علـــيه فإن $k = 6$ و بالتـــالي أي طي مبسط منتظم للجمع المترابط لمستويي إسقاط يكون من النوع $(6,3)$.

نظرية (4 – 12) :

يمكـــن طي السطـــح $\#^p P^2$ طيـــاً مـــبســـطًا عدد لا نهائي قابل للعد من الطيات .

الـــبـــرهـــان :

نفرض أن $N_p = \#^p P^2$ هو الجمع المترابط لعدد p من مستويات الإسقاط ، أي أن N_p هو ســـطـــح مـــتـــراص مـــتـــرابـــط غير موجه و بدون محيط من الجنس $p \geq 1$.

لأي سطح N_p يوجد غطاء مزدوج $\theta_p : M_{p-1} \to N_p$ ، حيث $M_g = \#^g T^2$ لكل $p > 1$ ، مع ملاحـــظة أن الغـــطاء المزدوج $\theta_1 : S^2 \to P^2$ ، حـــيث $P^2 = N_1, S^2 = M_0$ هو الغطاء المزدوج لمستوى الإسقاط .

إذا كان $f : N_p \to P_3$ هي طي مبسط فإن $\theta_p \circ f : M_{p-1} \to P_3$ هو طي مبسط . بالعكس أي طي مبسط $g : M_{p-1} \to P_3$ من الغطاء M_{p-1} إلى المضلع P_3 سينشئ طيًا مبسطًا من N_p على نفس المضلع و ذلك باستخدام دالة الغطاء θ_p . يتضح من ذلك أنه باستخدام الطيات المبسطة للسطوح الكعكية يمكن معرفة الطيات المبسطة للجمع المترابط لمستويات الإسقاط .

المراجع
References

المراجع

[1] Bishop , R.L. and Crittenden , R.J. : Geometry of Manifolds , Academic Press , Inc. New York , (1964) .

[2] Bishop , R.L. and Goldberg , S.I. : Tensor Analysis on , Manifolds , Macmillan Company , New York , (1968) .

[3] Chillingworth , D . : Smooth Manifolds and Maps , Internationa Atomic Energy Agency , Vol. 1 , 1-55 , (1974) .

[4] Do Carmo , M.P. : Differential Geometry of Curves and Surfaces , Prentic – Hall , Inc. ,New Jersey , (1976).

[5] El-Kholy , E.M. :Isometric and Topological Folding of Manifolds , Ph. D. Thesis , University of Southampton , (1981) .

[6] El-Kholy , E.M. and El-Ghoul , M. : Simplicial Folding , J. Fac. Edu. , Ain Shams Univ. , No. 7 , Part II , 127-139 , (1984) .

[7] El-Kholy , E.M. and Robertson , S.A : Topological Folding , Comm. Fac. Sci. Univ. , Ank. Ser. Al , Vol. 35 , 01-107 , (1986) .

[8] El-Kholy , E.M. and Al Khursani , H.A. : Folding of CW-Complexes , J. Inst. Math. and Comp. Sci. (Math. Ser.) , Vol. 4 , No. 1 , 41-48 , (1991) .

[9] El-Kholy , E.M. and Shahin , R.M. : Cellular Folding , J. Inst. Math. and Comp. Sci. (Math. Ser.) ,Vol. 11, No. 3 , 177-181, (1998) .

[10] El-Kholy , E.M. and Zeen El-Deen , M.R.:Dual Graphs and Cellular Folding , Int. J. Math. Sci. ,Vol. 22 , No.1, 66-73 , (1999).

[11] El-Kholy , E.M. and Basher , M. : Isometric Folding of Minkowski Space Time , Tensor Soci. , Kawajuchi Inst. Math. Sci. ,Vol. 65 , 194-201 , (2004) .

[12] El-Kholy , E.M. and El-Esawy , A. : Graph Folding of Some Special Graphs , J. Math. and Statis. , 1(1) , 66-70 , (2005).

[13] Farran , H.R. , El-Kholy , E.M. and Robertson , S.A. : Folding of Star Manifolds , Proc. Roy. Soc. , Edinburgh , 123A , 1011-1016 , (1993) .

[14] Farran , H.R. , El-Kholy , E.M and Robertson , S.A. : Folding a Surface to a Polygon , Geometriae Dedicata , 63 , 255-266 , (1996) .

[15] Giblin , P.J. : Graphs , Surfaces and Homology , Chapman and Hall , London , (1977) .

[16] Guillemin , V. and Pollack , A. : Differential Topology , Prentic - Hall , Inc. , Englewood Cliffs , New Jeresey , (1974) .

[17] Hicks , N.J.: Notes on Differential Geometry , Van Nostrand Reinhod Company , London , (1971) .

[18] Jones , A. and Gary , A. : Manifolds and Mechanics , Cambridge Univ. Press , (1987) .

[19] Kinsey , L.C. : Topology of Surfaces , Springer Verlag , New York , (1993) .

[20] Kuratowski ,K. : Topology , Vol. 1 , Academic Press , New York , (1966) .

[21] http://mathworld . wolfram . com .

[22] Massey , W.S. : Algebraic Topology : An Introduction , Harcourt Brace and World Inc. , (1967) .

[23] Robertson , S.A. : Isometric Folding of Riemannian Manifolds ,Proc. Roy. Soc. Edinburgh , 275-284 , (1977) .

[24] Saaty , T.L. and Kainen , P.C. : The Four Colour Problem : Assaults and Conquest , Mc Graw – Hill , Int. Book Comp. , New York , (1977) .

[25]Smale , S. : Generalzid Poincare' Conjecture in Dimensions Greater than Four , Ann. Math. , Vol. 24 , 391-397, (1961) .

[26] Shahin , R.M. : Regular Folding of Surfaces , Ph. D. Thesis Tanta Univ. , (1999) .

[27] Tapert , Y. : Differential Geometry with Application to Mechanics and Physics , Marcel Dekker , (2001).

[28] Vick , J.W. : Homology Theory : Introduction to Algebraic Topology , New York , Academic Press , (1973).

[29] Whiteny , H. : Differential Manifolds , Ann. Math. , 37 (1936) 645.

[30] Wilson , R.J. and Waltkins , J.J. : Graphs an Introductory Approach , Jhon Wiley and Sons Inc. New YorK , (1981) .

[31] http://en.wikipedia.org

قائمة المصطلحات

List of scientific words

قائمة المصطلحات

أ

إحداثيات	coordinates
إحداثيات مركزية	barycentric coordinates
ارتباط	connexion − connection
ارتباط تآلفي	affine connexion
أطلس	atlas
أطلس أملس	smooth atlas
إعادة تسمية	relabeling
أكبر حد سفلي	greatest lower band
أملس	smooth
انتقال متوازي	parallel translation
انغماس متقايس	isometric immersion

ب

بنية ريمانية	Riemannian structure
بنية ملساء	smooth structure

ت

triangulation	تثليث
complex	تركيب
cell complex	تركيب خلوي
product cell complex	تركيب خلوي ضربي
simplicial complex	تركيب مبسط
homeomorphism	تشاكل شكلي
local homeomorphism	تشاكل شكلي محلي
classification	تصنيف
identifying	تطابق
isometry	تقايس
restriction	تقييد
diffeomorphism	تماثل تفاضلي
plane representation	تمثيل مستوي
induced topology	توبولوجي مستحث

ث

bilinear	ثنائية الخطية

ج

connected sum	جمع مترابط

genus	جنس
geodesic	جيوديسي
totally geodesic	جيوديسي تام
complete geodesic	جيوديسي كامل

ح

edge	حرف
multiple edge	حرف مزدوج
tangent bundle	حزمة مماسية
vector field	حقل متجه

خ

Leibnitz property	خاصية ليبتننز
chart	خريطة
cell	خلية

د

interior	داخلية
real valued function	دالة ذات قيمة حقيقية
order of graph	درجة المخطط
cyclic	دوريًا

ر

vertex	رأس
pendant vertex	رأس متدلي
isolated vertex	رأس معزول
smooth map	راسم أملس
overlapping map	راسم تداخل
degree or valency of a vertex	رتبة رأس

ز

angle	زاوية

س

tours	سطح كعكي
double tours	سطح كعكي مزدوج أو سطح عقدي
size of graph	سعة المخطط

ش

semigroup	شبة زمرة
Mobius band	شريحة موباس

ض

inner product	ضرب داخلي

ط

stratum	طبقة
length	طول
folding	طي
topological folding	طي توبولوجي
cellular folding	طي خلوي
simplicial folding	طي مبسط
isometric folding	طي متقايس
octahedrol folding	طي مثمن

ع

Euler characteristic	عدد أويلر المميز
manifold	عديد طيات
smooth manifold	عديد طيات أملس
manifold with boundary	عديد طيات بمحيط
submanifold	عديد طيات جزئي
Riemannian manifold	عديد طيات ريماني

semi-Riemannian manifold	عديد طيات شبه ريماني
line element	عنصر الطول
metric element	عنصر المتري

غ

immersion	غمر
embedding	غمس
infinite	غير محدود
nondegeneracy	غير مضمحلة
nonorientable	غير موجه

ف

underlying space	فراغ أساسي
metric space	فراغ متري
tangent space	فراغ مماس
Hausdorff space	فراغ هاوس دورف

ق

colourable	قابل للتلوين

cyclic colourable	قابل للتلوين دوريًا
Klein bottle	قارورة كلاين

ل

loop	لفة

م

simplex	مبسط
Cauchy sequence	متتابعة كوشي
adjacent	متجاورين
vector	متجه
tangent vector	متجه مماس
connected	مترابط
compact	متراص
metric	متري
Riemannian metric	متري ريماني
homeomorphic	متشاكل شكليًا
locally homeomorphic	متشاكل شكليًا محليًا
isometric	متقايس
piecewise	متقطع
incident	متلازم

symmetric	متماثل
diffeomorphic	متماثل تفاضليًا
octahedron	مثمن
solid polyhedron	مجسم متعدد الأوجه مصمت
finite	محدود
locally	محليًا
cone	مخروط
double cone	مخروط مزدوج
graph	مخطط
simple graph	مخطط بسيط
dual graph	مخطط ثنائي
subgraph	مخطط جزئي
proper subgraph	مخطط جزئي فعلي
spanning subgraph	مخطط جزئي منشأ
complete graph	مخطط كامل
planar graph	مخطط مستوي
isomorphic graph	مخطط متماثل
affinley connected	مرتبط تآلفيًا
piecewise geodesic path	مسار جيوديسي متقطع
distance	مسافة
induced	مستحث
independent	مستقل
affinely independent	مستقلة إفنيًا
projective plane	مستوى الإسقاط

second-countable	مسلمة العد الثانية
directional derivative	مشتقة الاتجاه
covariant differentiation	مشتقة متغايرة
polygon	مضلع
degeneracy	مضمحلة
dependent	معتمد
affinely dependent	معتمدة إفنيًا
tangent	مماس
tensor	ممتد
metric tensor	ممتد متري
singularities	منفردة أو شاذة
positive definite	موجبة بالتحديد
orientable	موجه

و

face	وجه

الملخص باللغة الإنجليزية

English summary

Summary

The notion of folding is recent and important subject in geometry and it has many applications in different sciences . Suppose that a plane sheet of paper is crumpled gently in hands , and then is crushed flat against a desk top . The effect is to criss – cross the sheet with a pattern of creases which seem to be indiscriminate and anarchic .

It was S.A. Robetson [23] who in 1977 first observed that the patterns of creases so formed obey certain simple rules .

Then the theory of isometric folding has been pushed so far and many other types of folding are introduced by E. El-Kholy and others ([5] - [14]) . Among these sort of folding is the simplicial folding of simplicial complexes which invented by El-Kholy and El-Ghoul [6] .

An obvious example of a topological stratification of a 2-manifold is given by its triangulation . These triangulations can be done for any compact connected surface (compact connected 2- manifold) , and hence the surface will be called a simplicial complex consist of 0 , 1 , and 2 simplexes , Most interest attaches to folding in which M and N are triangulated , and $f : M \to N$ maps simplexes of dimension i, $i = 0,1,2$ to others of the same dimension . These are called simplicial folding .

In this thesis we classified all compact connected surfaces oriented or nonoriented that can be simplicial folded .

The Thesis consists of four chapters , list of references , list of scientific words used in the thesis and summary .

Chapter one : Classification of smooth manifolds and its triangulation

In this chapter we quoted some basic concepts and definitions in differential and topological geometry which are needed .

Chapter two : Riemannian manifolds, geodesics and graphs

In this chapter we discussed some background material about Riemannian manifolds , geodesics and some basic ideas in graphs .

Chapter three : complexes and some kinds of folding

In this chapter we discussed simplicaial and cellular complexes . These space on which simplicial and cellular folding may be defined respectively. Then we gave an idea about isometric , simplicial and cellular folding .

Chapter four : Folding of simplicial complexes

In this chapter we classified all compact connected surfaces which can be simplicial folded . For each surfaces we obtained the relations satisfied by the number of vertices , edges and faces of the folding graph .

Kingdom of Saudi Arabia
Ministry of Higher Education
Umm AL-Qura University
Deanery of High Studies
College of Applied Science
Girls Section
Department of Mathematics

Folding of Simplicial Complexes

A Thesis
Submitted to the Mathematic Department in
Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of M.Sc.
In (Pure Mathematics – Differential Geometry)

By
Ashwaq S. Labban

Supervised by
Dr. Entesar M. El-Kholy
Professor of Pure Mathematics
Faculty of Applied Science
Department of Mathematics
Taibah University
Almadina Almunawwarah
Previous

1430H – 2009D